第 1 問 線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ は，

$$f(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad f(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad f(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

を満たすとする。

(1)

$$f(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} \boxed{\text{ア}} \\ \boxed{\text{イ}} \\ \boxed{\text{ウ}} \end{bmatrix}, \quad f(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} \boxed{\text{エ}} \\ \boxed{\text{オカ}} \\ \boxed{\text{キ}} \end{bmatrix}, \quad f(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} \boxed{\text{ク}} \\ \boxed{\text{ケ}} \\ \boxed{\text{コ}} \end{bmatrix}$$

である。

(2) 下の $\boxed{\text{シ}}$, $\boxed{\text{ス}}$ に当てはまるものを，次の ⓪〜⑥ のうちから一つずつ選べ。ただし，$\boxed{\text{シ}}$, $\boxed{\text{ス}}$ の解答の順序は問わない。

核 $\ker f$ の次元は $\boxed{\text{サ}}$ 次元で，$\ker f$ に含まれるのは $\boxed{\text{シ}}$, $\boxed{\text{ス}}$ である。

⓪ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ① $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ④ $f(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix})$ ⑤ $f(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix})$ ⑥ $\mathbf{0}$

(3) 0 でない整数 a, b, c に対して，線形写像 $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$g(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) = ax + by + cz$$

で定める。また，合成写像 $h = g \circ f$ を考える。任意の実数 x, y, z に対して

$$h(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) = 0$$

が成り立つような整数 a, b, c のうち，a が正で最小のものは，

$$a = \boxed{\text{セ}}, \quad b = \boxed{\text{ソ}}, \quad c = \boxed{\text{タチ}}$$

である。

第 2 問 4 項間漸化式

$$a_{n+3} - a_{n+2} - a_{n+1} + a_n = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 4$$

を満たす数列 $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ の一般項を求めよう。

(1) $\mathbb{R}^3$ の元 $\boldsymbol{x}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ を

$$\boldsymbol{x}_n = \begin{bmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \\ a_n \end{bmatrix}$$

とおく。3 次正方行列 A が $\boldsymbol{x}_{n+1} = A\boldsymbol{x}_n$ を満たすとすると，

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{\text{ア}} & \boxed{\text{イ}} & \boxed{\text{ウエ}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

である。

次の $\boxed{\text{オ}}$ に当てはまるものを，下の⓪〜⑥のうちから一つ選べ。
行列 A の固有値は $\boxed{\text{オ}}$ である。

⓪ 1（重複度 3）　① 0（重複度 3）　② -1（重複度 3）
③ 1（重複度 2）と 0　④ 1（重複度 2）と -1　⑤ 0（重複度 2）と 1
⑥ 0（重複度 2）と -1　⑦ -1（重複度 2）と 1　⑧ -1（重複度 2）と 0
⑨ 1 と 0 と -1

次の $\boxed{\text{カ}}$ に当てはまるものを，下の⓪〜⑦のうちから一つ選べ。
行列 A についての命題
(a) A は対角化可能である。
(b) A は正定値である。
(c) A は直交行列である。
の真偽の組合せとして正しいものは $\boxed{\text{カ}}$ である。

	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
(a)	真	真	真	真	偽	偽	偽	偽
(b)	真	真	偽	偽	真	真	偽	偽
(c)	真	偽	真	偽	真	偽	真	偽

(2) 3 次正方行列

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

を考える。

$$P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} \boxed{キ} & \boxed{ク} & \boxed{ケ} \\ \boxed{ク} & \boxed{コ} & \boxed{サシ} \\ \boxed{ケ} & \boxed{サシ} & \boxed{ス} \end{bmatrix}$$

である。また，

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \boxed{セ} & \boxed{ソ} & 0 \\ 0 & \boxed{タ} & \boxed{チ} \\ 0 & 0 & \boxed{ツテ} \end{bmatrix}$$

である。したがって，$\boldsymbol{x}_n = A^{n-1}\boldsymbol{x}_1$ であることを利用すれば，

$$a_n = \frac{\boxed{ト}\,n - \boxed{ナ} + \boxed{ニヌ}^{\,n-1}}{\boxed{ネ}}$$

が求められる。