Question 2

漸化式

$$a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} - a_n, \quad a_1 = 0,\ a_2 = -1,\ a_3 = 1$$

で定められる数列 $\{a_n\} \quad (n = 1, 2, 3 \dots)$ の一般項を求めよ．

Answer:

$$a_n = \frac{2(n-1) + 3\{(-1)^{n-1} - 1\}}{4}.$$

1 解答中の記号，定理の補足

- n 次正方行列

$$J(\alpha, n) = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

  を固有値 α に対するサイズ n の ジョルダン細胞 という．
- 例:

$$J(2,3) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad J(4,2) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad J(7,1) = \begin{bmatrix} 7 \end{bmatrix}$$

  である．
- 正方行列 A に対して，$J = P^{-1}AP$ がジョルダン細胞の直和（$\oplus$）で表されるとき，J を A の ジョルダン標準形 という．
- 例:

$$J(7,3) = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$J(2,1) \oplus J(-1,2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$J(1,1) \oplus J(2,1) \oplus J(3,1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

  はすべてジョルダン細胞の直和で表されている．
- ジョルダン標準形の対角成分は，（重複込みで）A の固有値が並ぶ．
- $(A - \alpha E)\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ を満たす $\boldsymbol{v}$ 全体を α に対する 固有空間 といい，V_α で表す．
- V_α の元で零ベクトル $\mathbf{0}$ でないものを α に対する 固有ベクトル という．

ジョルダン細胞の個数

α を n 次正方行列 A の固有値とする．固有値 α に対するジョルダン細胞の個数は，

$$n - \mathrm{rank}(A - \alpha E)$$

である．

2　解答

- ベクトル $\boldsymbol{x}_n$ を
$$\boldsymbol{x}_n = \begin{bmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \\ a_n \end{bmatrix}$$
とおく．
- $\boldsymbol{x}_{n+1} = A\boldsymbol{x}_n$ を満たす行列 A を求める．
$$\boldsymbol{x}_{n+1} = \begin{bmatrix} a_{n+3} \\ a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n+2} + a_{n+1} - a_n \\ a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \\ a_n \end{bmatrix} = A\boldsymbol{x}_n$$
と計算して，
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
- 固有値を求める．
$$\varphi_A(x) = |xE - A| = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 1 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} = x^3 - x^2 - x + 1 = (x+1)(x-1)^2$$
より，固有値は -1（重複度 1） と 1（重複度 2）である．
- ジョルダン標準形 J を決定するために各固有値に対する固有空間の次元を調べる．固有値 1 に関して，
$$A - 1 \cdot E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
より，$\mathrm{rank}(A - 1 \cdot E) = 2$ であるから，固有値 1 に対するジョルダン細胞は $3 - 2 = 1$ つ．
また，V_1 の基底として $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ が選べる．
固有値 -1 に関して，
$$A - (-1) \cdot E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
より，$\mathrm{rank}(A - (-1) \cdot E) = 2$ であるから，固有値 -1 に対するジョルダン細胞は $3 - 2 = 1$ つ．また，V_{-1} の基底として $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ が選べる．
したがって A のジョルダン標準形 J は
$$J = J(1,2) \oplus J(-1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
と決定できる．
- 正則行列 P を求める．$J = P^{-1}AP$ より $AP = PJ$ である．$P = [\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\ \boldsymbol{p}_3]$ とおくと，
$$\begin{cases} A\boldsymbol{p}_1 &= 1 \cdot \boldsymbol{p}_1 &+ 0 \cdot \boldsymbol{p}_2 &+ 0 \cdot \boldsymbol{p}_3 \\ A\boldsymbol{p}_2 &= 1 \cdot \boldsymbol{p}_1 &+ 1 \cdot \boldsymbol{p}_2 &+ 0 \cdot \boldsymbol{p}_3 \\ A\boldsymbol{p}_3 &= 0 \cdot \boldsymbol{p}_1 &+ 0 \cdot \boldsymbol{p}_2 &+ -1 \cdot \boldsymbol{p}_3 \end{cases}$$

が成り立つ．1 つ目の式より $A\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_1$ であるが，これは $\boldsymbol{p}_1$ が 固有値 1 に対する A の固有ベクトルであることを表すから，V_1 の基底を採用して，$\boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ としてよい．2 つ目の式の $\boldsymbol{p}_2$ を左辺に移項して整理すると $(A-E)\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_1$ であるから，$\boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ とおいて，

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

を満たす x, y, z を 1 つ求めればよい．例えば，$\boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ が選べる．3 つ目の式は $\boldsymbol{p}_3$ が 固有値 -1 に対する A の固有ベクトルであることを表すから，V_{-1} の基底を採用して，$\boldsymbol{p}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ としてよい．以上より，求める正則行列 P は

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- $A^n = (PJP^{-1})^n = (PJP^{-1})(PJP^{-1})\cdots(PJP^{-1}) = PJ^nP^{-1}$ である．ジョルダン細胞の n 乗の公式と掃き出し法の計算により

$$J^n = \begin{bmatrix} 1^n & n\cdot 1^{n-1} & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

であるから，

$$A^n = PJ^nP^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2n+3+(-1)^{n+2} & 2+2(-1)^{n+3} & -2n-1+(-1)^{n+2} \\ 2n+1+(-1)^{n+1} & 2+2(-1)^{n+2} & -2n+1+(-1)^{n+1} \\ 2n-1+(-1)^n & 2+2(-1)^{n+1} & -2n+3+(-1)^n \end{bmatrix}$$

を得る．$\boldsymbol{x}_n = A^{n-1}\boldsymbol{x}_1$ が成り立つことを利用すれば，この右辺を実際に計算して

$$a_n = \frac{2(n-1)+3\{(-1)^{n-1}-1\}}{4}$$

が求められる．