数学 Ⅲ

TMyuki

2017

まえがき

本書は現行のカリキュラム上，高校３年生が学ぶ「数学 III」に該当する内容について，教科書レベルの内容から入試での背景知識までを扱います．本書はおおきく２つの分野に分けて構成しています;

- 複素数，２次曲線，極座標など，図形・グラフの扱い方（１〜３章）
- 極限を出発点とした微分・積分と，その基礎となる関数についての補足（４〜１０章）

学校のカリキュラムや入試までの目標に合わせ，この２つのどちらを先にすすめても，理解の助けになることを目標としました．ただし，カリキュラム上，例えば７章以降では媒介変数表示された関数の導関数などを扱うため，後半から進める場合は，そのような箇所をもう一度あとから見直す必要があります．

各章は節ごとに演習問題を用意していますが，完成度は５０％[*1]で，ページ数の都合で略解とヒントのみ載せています．これは入試を想定した様々なパターンの問題をはじめ，少なくとも１回は見ておいてほしいもの，数学的興味があるものを中心に集めました．なお，複素数，微分，積分など，既に学んだであろう分野であっても，本書の中で再定義しているものがあります．冗長で不要と思われる証明を含め，必要に応じて読み飛ばしてください．

なお，本テキストは授業で用いていたものをまとめただけのものであり，内容の一部または全部を参考にしたことによる一切の責任は負いません．誤脱字，演習解答のミスは数え切れないほどあると思います．

本テキストにおける主要な略称は以下を意味します;

- Def: 定義（Definition），言葉や記号の意味．ただし，教科書でいう「導入」にあたる部分やすでに既習であると思われる内容など，Def として番号付けしていないものもあります．
- Th: 定理（Theorem），定義から導くことができる事柄．本テキストではその中でも特に主張が強い（重要な）ものにつけました．
- Prop: 命題（Propositon），「真偽の定まる文」という意味ではなく，定義から速やかに導かれるものや性質といった，あえて解答中に記述する必要がない程度の「弱い主張」．
- Lemma: 補題（Lemma），Th を示すための準備としての主張．本テキストの Lemma は証明するための道具としての扱いであり，教科書には載っていない補助的な役割のもの．
- Cor: 系（Corollary），他の定理から速やかに得られるような主張．
- Comp: 補完（Completion），計算の手順など，触れておくべきであると判断した知識．

Th から Cor はいずれも定義から導くことができる事柄であるが，その内容の（筆者の主観による）強さで分類しているということです．あくまで個人的な見解に基づいているため，どうしてここは Th なのか，といった疑問は無視してください．また，Remark には通し番号を付与していませんが，「注意」あるいは「コメント」という意味合いで用いています．

文責: TMyuki

[*1] 演習問題とその解答については，１〜４章，１０章のものが未完です．１章 1.3 節〜４章は演習問題を載せていません．また，１０章の演習問題は内容が不足しています．

目次

0　準備

Th 0.1（積和の公式）

1) $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$　　2) $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$

3) $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$

証明　三角関数の加法定理

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \tag{0.1}$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \tag{0.2}$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \tag{0.3}$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \tag{0.4}$$

に対して，次の計算をすれば結果を得る;

1)　$(0.4)-(0.3)$　　2)　$(0.1)+(0.2)$　　3)　$(0.3)+(0.4)$

Th 0.2（和積の公式）

1) $\sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$　　2) $\cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

証明　$\alpha+\beta=A,\ \alpha-\beta=B$ とおくと，$\alpha=\dfrac{A+B}{2},\ \beta=\dfrac{A-B}{2}$ である．

1)　Th 0.1 2) 式に上の $\alpha,\ \beta$ を代入すれば得られる．

2)　Th 0.1 3) 式に上の $\alpha,\ \beta$ を代入すれば得られる．

1　複素数平面

1.1　複素数の定義と性質

2 乗して -1 になる数のひとつを記号 i で表す．すなわち

$$i^2 = -1 \quad \text{あるいは} \quad \sqrt{-1} = i$$

である．このような i を **虚数単位** という．x, y を実数とするとき，i を用いて

$$z = x + yi$$

の形で表される数を **複素数** という．また，x を z の **実部**，y を z の **虚部** という．$y = 0$ のとき z を **実数** といい，実数でない複素数（すなわち $y \neq 0$ のときの z）を **虚数**，とくに $x = 0$ である虚数を **純虚数** という[*2]．　虚部の符号を変えた複素数

$$\overline{z} = x - yi$$

を複素数 z の **共役な複素数** という．ただし，$\overline{\overline{z}} = z$ である．

複素数の相等　x, y, a, b を実数とする．2 つの複素数 $z = x + yi$ と $w = a + bi$ について

$$z = w \quad \Longleftrightarrow \quad x + yi = a + bi \quad \Longleftrightarrow \quad x = a \text{ かつ } y = b$$

であり，特に

$$z = x + yi = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = y = 0$$

が成り立つ．

複素数の四則演算　2 つの複素数 $z = x + yi$ と $w = a + bi$ に対して

1) $z + w = (x + yi) + (a + bi) = x + a + (y + b)i$　　2) $z - w = (x + yi) - (a + bi) = x - a + (y - b)i$

3) $zw = (x + yi)(a + bi) = ax - by + (bx + ay)i$　　4) $\dfrac{z}{w} = \dfrac{x + yi}{a + bi} = \dfrac{ax + by + (bx - ay)i}{a^2 + b^2}$

ただし 4. では $w \neq 0$ で，2 つ目の等号は分母分子に $a - bi$ をかけて整理した．

Prop 1.1

複素数 z，w に対して次が成り立つ．ただし (4) では $w \neq 0$．

1) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$　　2) $\overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}$　　3) $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

4) $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}$　　5) $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$

[*2] テキストによっては実数でない複素数ではなく，純虚数のことを単に虚数とよぶこともある．

証明　→ 演習問題 1.1.

$\overline{z}$ と z は虚部の符号が異なるだけだから，$z+\overline{z}$ は実数であり，$z-\overline{z}$ は純虚数である．また，次の性質 1)，2) が成り立つ．

Th 1.2

1) z が実数である $\iff$ $\overline{z}=z$.　　2) z が純虚数である $\iff$ $\overline{z}=-z$.

Th 1.3

実数係数 n 次方程式

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0 \quad (a_k \text{ は実数})$$

が虚数 z を解に持つとき，その共役複素数 $\overline{z}$ もこの方程式の解である．

証明　虚数 z が解であるから，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k z^k = 0$ が成り立つ．このとき

$$0 = \overline{0} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k z^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} \cdot \overline{z^k} = \sum_{k=0}^{n} a_k (\overline{z})^k$$

であるから，$\overline{z}$ も解である．ただし，Prop 1.1 および Th 1.2 を用いた．□

Def 1.4（複素数の絶対値）

複素数 $z=x+iy$ に対して

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2+y^2}$$

を複素数 z の **絶対値** という．

1.2　複素数平面

Def 1.5（複素数平面）

複素数 z の実部を x 軸，虚部を y 軸に対応させた座標平面を **複素数平面** という．複素数 z は複素数平面上の点を表し，複素数 z と原点との距離は $|z|$ に等しい．z が表す点を単に点 z と表す．また，x 軸，y 軸に対応するものをそれぞれ **実軸**，**虚軸** という[*3]．

Remark

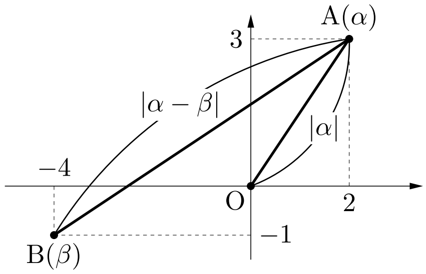
- 図形的に扱うために複素数 z が表す点を A とするときは A(z) などと表す．
- 2 点 α, β 間の距離は $|\alpha-\beta|$ である．

[*3] x，y のかわりに実軸を Re，虚軸を Im とかくことがある．Real，Imaginary の略である．

例 1.6　右図は 2 つの複素数 $\alpha = 2+3i$ と $\beta = -4-i$ が表す点をそれぞれ A，B とし，それを複素数平面上にかいたものである．AB 間の距離は

$$\mathrm{AB} = |\alpha - \beta| = |6+4i| = \sqrt{6^2+4^2} = 2\sqrt{13}$$

である．



Prop 1.7（複素数平面上の対称移動）

α を複素数とする．点 α に対して

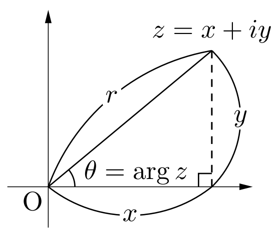
1) 点 $\overline{\alpha}$ は実軸に関して対称．　2) 点 $-\overline{\alpha}$ は虚軸に関して対称．　3) 点 $-\alpha$ は原点に関して対称．

Def 1.8（複素数の極形式）

0 でない複素数 $z = x+yi$ に対して，原点 O と点 z を結んでできる線分と x 軸の正の部分とがなす角を z の **偏角** といい，$\arg z$ と表す．また，$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$，$\theta = \arg z$ とすると，$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ と表すことができる．すなわち

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

と表すことができる．これを z の **極形式** という．



Remark　一般に，複素数 z の偏角 $\theta = \arg z$ について

$$\arg z = \theta,\ \theta \pm 2\pi,\ \theta \pm 4\pi,\ \ldots$$

であり，一意に定まらない．また，このテキストでは θ は弧度法または度数法どちらでもよいものとしているが，θ と θ° を使い分けることもある．

例 1.9　$z = 1+i$ の極形式は $z = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$ である．

$\because$　$r = |z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ である．偏角 θ は

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\[2ex] \sin\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

より，$\theta = 45^\circ$．したがって，$z = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$．　□

複素数平面上での複素数の四則演算の意味は次のようになる．

Prop 1.10（複素数の実数倍，加法，減法）

複素数平面上の 2 点 A(α)，B(β) と 0 でない実数 k に対し

1) $\beta = k\alpha \iff \overrightarrow{\mathrm{OB}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}}.$

2) C($\alpha+\beta$) に対して $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}.$

3) D($\alpha-\beta$) に対して $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}.$

証明　それぞれ実部と虚部を計算して比較すれば判る． □

Prop 1.11（複素数の乗法，除法）

極形式であらわされた 2 つの複素数 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$，$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ に対し

1)
- $z_1z_2 = r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$
- $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$
- $\arg z_1z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$

2)
- $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$
- $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$
- $\arg\dfrac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$

証明　1) のみ示す．

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1r_2\{(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\} \\ &= r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\} \end{aligned}$$

である．ただし，最後の等号は三角関数の加法定理による．これは複素数 z_1z_2 の極形式になっているから，

$$\begin{cases} |z_1z_2| = r_1r_2 = |z_1||z_2| \\ \arg z_1z_2 = \theta_1 + \theta_2 = \arg z_1 + \arg z_2 \end{cases}$$

を得る．2) も同様に計算すればよい． □

Remark　点 z を原点中心に角 θ だけ回転させた点は，$z(\cos\theta + i\sin\theta)$ と表される．

Th 1.12（de Moivre の定理）

n を整数とするとき，次の等式が成り立つ．

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

証明　→ 演習問題 1.5.

例 1.13　a を正の実数とする．n 乗して a になる複素数は次の n 個である;

$$z_k = \sqrt[n]{a}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

$\because$　n 乗して a になる複素数を $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とおく．$z^n = a$ であるから de Moivre の定理より

$$a = z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta), \quad a = |a| = |r^n| = |r|^n = r^n \iff r = \sqrt[n]{a}$$

である．1 つ目の式の左辺は実数であるから，右辺も実数である．したがって

$$a = r^n \cos n\theta = a\cos n\theta, \quad 0 = r^n \sin n\theta = a\sin n\theta$$

が成り立つ．$a \neq 0$ に注意すれば

$$\cos n\theta = 1 \text{ かつ } \sin n\theta = 0 \iff n\theta = 2k\pi \quad (k \text{ は整数}).$$

最後に解の重複性を考える（$0 \leqq \theta < 2\pi$ になるように k の値を制限する）と，求める解は n 個あって

$$z_k = \sqrt[n]{a}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$ □

Remark　この n 個の複素数は，点 $(\sqrt[n]{a})$ を頂点に持ち，半径 $\sqrt[n]{a}$ の円に内接した正 n 角形の頂点を表す．

1.3　複素数平面と図形

複素数平面上では，Prop 1.10 などからも判るとおり，位置ベクトルの考えを用いることができる．

Prop 1.14（内分点と外分点）

3 点 A(α)，B(β)，C(γ) に対して

1) 線分 AB を $m:n$ に内分する点は $\dfrac{n\alpha + m\beta}{m+n}$ ．

2) 線分 AB を $m:n$ に外分する点は $\dfrac{-n\alpha + m\beta}{m-n}$ ．

3) 三角形 ABC の重心は $\dfrac{\alpha + \beta + \gamma}{3}$ ．

Prop 1.15（複素数があらわす図形）

1) $|z - \alpha| = r$ は点 α を中心とする半径 r の円を表す．

2) $|z - \alpha| = |z - \beta|$ は 2 点 α，β を結ぶ線分の垂直二等分線を表す．

3) $\arg z = \theta$ は傾き $\tan\theta$ の直線を表す．

証明　$z = x + yi$, $\alpha = a + bi$ とする．$z - \alpha = (x-a) + (y-b)i$ であるから

$$r = |z - \alpha| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \quad \text{ゆえに} \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$ □

例 1.16　点 z が原点 O を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，$w = \dfrac{z-i}{z+i}$ は虚軸を表す．

∵　与えられた式は $(w-1)z=(w+1)i$ と変形できる．$w=1$ はこの等式を満たさないから, $z=\dfrac{(w+1)i}{w-1}$.
これを $|z|=1$ に代入して

$$1=|z|=\left|\frac{(w+1)i}{w-1}\right|=\frac{|w+1||i|}{|w-1|}=\frac{|w+1|}{|w-1|}.$$

ゆえに $|w+1|=|w-1|$ を得る．これは 2 点 1，−1 の垂直二等分線，すなわち虚軸をあらわす．□

Remark　次の等式が成り立つ．

$$z\overline{z}+z\overline{\alpha}+\overline{z}\alpha+\alpha\overline{\alpha}=|z+\alpha|^2$$

円の方程式をあらわすことを示すときに $|\quad|^2$ が必要であるが，これを用いて整理することがある．

Prop 1.17（３点のなす角）

3 点 A(α)，B(β)，C(γ) に対して

$$\angle\mathrm{BAC}=\arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}.$$

証明　$\angle\mathrm{BAC}=\theta$ とする．3 点を，点 A が原点 O に一致するように平行移動させる．点 B，点 C の平行移動後の点をそれぞれ B′，C′ とすれば，B′($\beta-\alpha$)，C′($\gamma-\alpha$) である．いま，点 B′ を原点中心に θ だけ回転させた点は半直線 OC′ 上にあるから，

$$(\beta-\alpha)(\cos\theta+i\sin\theta)=k(\gamma-\alpha)\quad(k\text{ は正の実数})$$

が成り立つ．よって

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{1}{k}(\cos\theta+i\sin\theta)$$

である．両辺の偏角を考えれば

$$\angle\mathrm{BAC}=\arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}.$$

□

Th 1.18（複数の点の位置関係）

3 点 A(α)，B(β)，C(γ)，D(δ) に対して

1)　AB // AC　$\iff$　$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が実数．

2)　AB ⊥ AC　$\iff$　$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が純虚数．

3)　AB // CD　$\iff$　$\dfrac{\delta-\gamma}{\beta-\alpha}$ が実数．

4)　AB ⊥ CD　$\iff$　$\dfrac{\delta-\gamma}{\beta-\alpha}$ が純虚数．

証明　1)，2)，4) については実数の偏角が 0° または 180°，純虚数の偏角が 90° または 270° であることから判る．3) については位置ベクトルの考えから判る．□

1.4　演習問題

解答に複素数 z の偏角 $\arg z$ が必要な問題では，すべて $0\leqq\arg z<2\pi$ の範囲で記せ．

$\star\star$ $\diamondsuit$ $\star\star$ $\clubsuit$ $\star\star$ 1.1 節 $\star\star$ $\heartsuit$ $\star\star$ $\spadesuit$ $\star\star$

1.1 Prop 1.1 1)〜5) を示せ．

1.2 z を 0 でない複素数とする．次の値は実数と純虚数のどちらであるか調べよ．

(1) $\dfrac{z+\overline{z}}{2}$ (2) $\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$ (3) $z^2+(\overline{z})^2$ (4) $z^2-(\overline{z})^2$

1.3 $z+\dfrac{1}{z}$ が実数となるような複素数 z の満たすべき条件を求めよ．

$\star\star$ $\diamondsuit$ $\star\star$ $\clubsuit$ $\star\star$ 1.2 節 $\star\star$ $\heartsuit$ $\star\star$ $\spadesuit$ $\star\star$

1.4 次の複素数に対して，絶対値，偏角，極形式を求めよ．

(1) $\alpha=\sqrt{3}+i$ (2) $\beta=-2i$ (3) $\gamma=-3$ (4) $\delta=\dfrac{-7-i}{4-3i}$

1.5 Th 1.12 を，(a) n が負でない整数のとき，(2) n が負の整数のとき に証明せよ．

1.6 $\alpha=-1+\sqrt{3}i$，$\beta=1+i$ に対して，次の値を求めよ．

(1) $|\alpha\beta|$，$\arg(\alpha\beta)$ (2) $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|$，$\arg\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)$

1.7 $\alpha=1+\sqrt{3}i$，$\beta=(\sqrt{2}-\sqrt{6})+i(\sqrt{2}+\sqrt{6})$ とする．

(1) $\dfrac{\beta}{\alpha}$ を計算せよ． (2) $\arg\beta$ を求めよ．

1.8 次の値を求めよ．

(1) $(1+i)^8$ (2) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^{12}$ (3) $\left(\dfrac{-64+16i}{85+51i}\right)^4$

1.9 次の方程式を複素数の範囲で解け．

(1) $z^8=1$ (2) $z^3+z^2+z+1=0$ (3) $z^4=-2+2\sqrt{3}i$

1.10 $z=\cos\dfrac{\pi}{7}+i\sin\dfrac{\pi}{7}$ に対して，次の値を求めよ．

(1) z^{14} (2) $1+z+z^2+\cdots+z^{13}$ (3) $1+z+z^2+\cdots+z^{2016}$

1.11 複素数平面上で点 $z_1=2i$ を頂点の 1 つに持ち，原点を中心とした半径 2 の円に内接する正三角形の残りの頂点 z_2，z_3 を求めよ．

1.12 複素数 z が $|z|=1$，$|z-i|=1$ を満たすとき，次の値を求めよ．ただし，a は実数とする．

(1) $z-\overline{z}$ (2) $z^2+\dfrac{1}{z^2}$ (3) $|z-ai|$ の最小値

2　２次曲線

座標平面上で，方程式

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2fx + 2gy + c = 0$$

を満たすような点 (x, y) によって表される曲線を **２次曲線** という[*4]．この式の左辺は２つの変数 x，y によって値が決まるから，これを $F(x, y)$ などと表すことがある．この章では特に次の３つの２次曲線

- 放物線
- 楕円
- 双曲線

の中で，xy の項が含まれない 標準形 と呼ばれるものを扱う[*5]が，先に次の一般的な事実に注意しておく．

Th 2.1（グラフの平行移動）

方程式 $F(x, y) = 0$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したグラフの方程式は

$$F(x - p, y - q) = 0$$

で与えられる．

Th 2.2（グラフの回転移動）

方程式 $F(x, y) = 0$ のグラフを原点を中心に反時計回りに角 θ だけ回転させたグラフの方程式は

$$F(x\cos\theta + y\sin\theta, -x\sin\theta + y\cos\theta) = 0$$

で与えられる．

証明　点 (x, y) を原点を中心として反時計回りに角 θ　$(0 \leqq \theta < 2\pi)$ だけ回転させた点を (X, Y) とすると

$$X + Yi = (x + yi)(\cos\theta + i\sin\theta) = x\cos\theta - y\sin\theta + i(x\sin\theta + y\cos\theta)$$

が成り立つ．実部と虚部をそれぞれ比較して整理すると

$$\begin{cases} x = X\cos\theta + Y\sin\theta \\ y = -X\sin\theta + Y\cos\theta \end{cases}$$

であるから，x を $x\cos\theta + y\sin\theta$，$y$ を $-x\sin\theta + y\cos\theta$ に置きかえれば，回転後の方程式を得る．　□

Remark　これは数 I，数 II で扱った図形についても成り立つ．例えば２次関数 $y = x^2$ は，$F(x, y) = y - x^2$ とすれば $F(x, y) = 0$ と表されるが，このグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動させると $F(x - p, y - q) = (y - q) - (x - p)^2 = 0$ である．整理すれば $y = (x - p)^2 + q$ となるから，頂点を見れば確かに平行移動していることが判る．

[*4] 円錐の断面に見られる図形であることから，円錐曲線とも呼ばれる．

[*5] xy の項が含まれている２次曲線は，標準形の２次曲線を回転させて得られる．

2.1　放物線

Def 2.3（放物線）

定点 F と，F を通らない定直線 ℓ からの距離が等しい点の軌跡を 放物線 という．点 F を放物線の 焦点[*6]，定直線 ℓ を放物線の 準線 といい，焦点 F を通り，準線と直交する直線を放物線の 軸，軸と放物線の交点を放物線の 頂点 という．

例 2.4（放物線の標準形）　$p>0$ に対して $\mathrm{F}(0,p)$，直線 $\ell: y=-p$ とする．直線 ℓ と点 P の距離を d とすると

$$d = y+p, \quad \mathrm{PF}=\sqrt{x^2+(y-p)^2}$$

が成り立つ．放物線の定義より $d=\mathrm{PF}$ としてみれば，$d^2=\mathrm{PF}^2$ であるから

$$(y+p)^2 = x^2+(y-p)^2 \quad\iff\quad x^2=4py \tag{2.5}$$

を得る．y について解けば，これは確かに数 I で扱った放物線の式の形をしている．同様にして，$\mathrm{F}(p,0)$，直線 $\ell: x=-p$ とすると

$$y^2=4px \tag{2.6}$$

を得る．実はこれも放物線の方程式である．

放物線 (2.5) に対しては

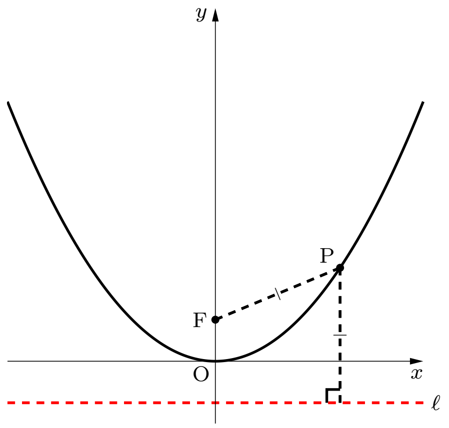
焦点 $(0,p)$，　準線：直線 $y=-p$，　軸：y 軸（直線 $x=0$），　頂点 $(0,0)$

であり，放物線 (2.6) に対しては

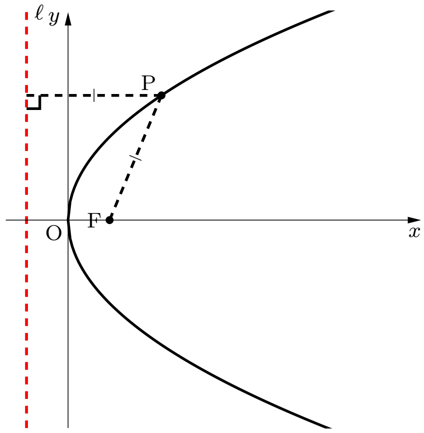
焦点 $(p,0)$，　準線：直線 $x=-p$，　軸：x 軸（直線 $y=0$），　頂点 $(0,0)$

である．(2.5)，(2.6) を 放物線の標準形 という．

標準形 (2.5) のグラフ



標準形 (2.6) のグラフ



[*6] F は焦点の英語 Focus を表す．

2.2　楕円

Def 2.5（楕円）

２つの定点 F，F′ からの距離の和が一定である点の軌跡を **楕円** という．点 F，F′ を楕円の **焦点**，線分 FF′ の中点を楕円の **中心** という．また，直線 FF′ を **長軸**，中心を通り長軸と垂直な直線を **短軸** といい，長軸，短軸と楕円の４つの交点を楕円の **頂点** という．

例 2.6（楕円の標準形）　$0 < c < a$ に対して $\mathrm{F}(c, 0)$，$\mathrm{F}'(-c, 0)$ とする．点 $\mathrm{P}(x, y)$ に対して，$\mathrm{PF}+\mathrm{PF}' = 2a$ であるとすると

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \mathrm{PF}+\mathrm{PF}' = 2a$$

が成り立つ．左辺の第２項を右辺に移項して，両辺の平方をとると

$$(x-c)^2+y^2 = (x+c)^2+y^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+4a^2 \quad\Longleftrightarrow\quad a^2+cx = a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

である．再び両辺の平方をとれば

$$a^4+2a^2cx+c^2x^2 = a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2} = 1$$

と整理できる．ここで $a^2-c^2 = b^2$ とおくと

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{2.7}$$

を得る．$0 < c < b$ に対しては，$\mathrm{F}(0, c)$，$\mathrm{F}'(0, -c)$ として，距離の和を $2b$ とする．$a^2 = b^2-c^2$ とおけば，(2.7) とほとんど同様に

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{2.8}$$

を得る．楕円 (2.7)，(2.8) は式の形は同じであるが，a と b の値の大小関係が異なる．楕円 (2.7) については $a > b$ であり

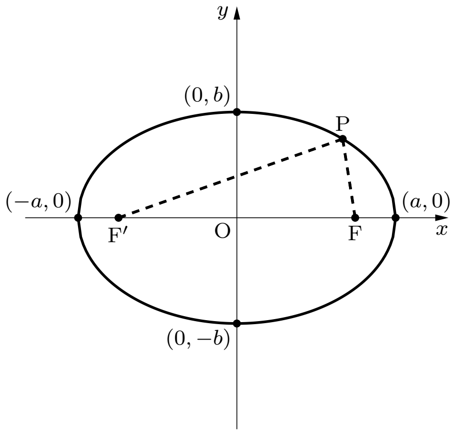
$$\text{焦点 }(\sqrt{a^2-b^2}, 0)\text{，}(-\sqrt{a^2-b^2}, 0)\text{，}\qquad \text{頂点 }(a, 0)\text{，}(-a, 0)\text{，}(0, b)\text{，}(0, -b)\text{，}$$
$$\text{長軸の長さ：}2a\text{，}\qquad \text{短軸の長さ：}2b$$

であり，楕円 (2.8) については $a < b$ であり

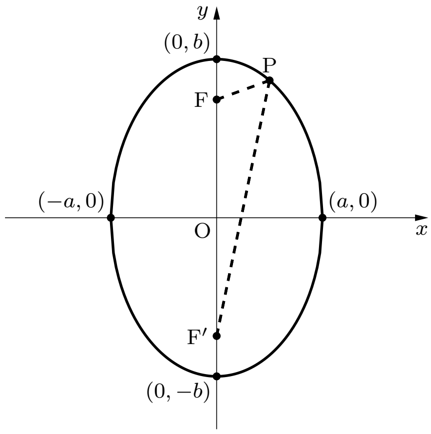
$$\text{焦点 }(0, \sqrt{b^2-a^2})\text{，}(0, -\sqrt{b^2-a^2})\text{，}\qquad \text{頂点 }(a, 0)\text{，}(-a, 0)\text{，}(0, b)\text{，}(0, -b)\text{，}$$
$$\text{長軸の長さ：}2b\text{，}\qquad \text{短軸の長さ：}2a$$

である．(2.7)，(2.8) を **楕円の標準形** という．

標準形 (2.7) （$a > b$）のグラフ



標準形 (2.8) （$a < b$） のグラフ



Remark　標準形の式において，焦点は $a > b > 0$ であれば x 軸上，$b > a > 0$ であれば y 軸上になる．

楕円の標準形の式において $a = b = r$ とすると，通常の円の方程式 $x^2 + y^2 = r^2$ が得られる．すなわち，円は楕円の特別な場合である．また，楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$ は

1)　円 $x^2 + y^2 = a^2$ を y 軸方向に $\dfrac{b}{a}$ 倍した図形である．

2)　円 $x^2 + y^2 = b^2$ を x 軸方向に $\dfrac{a}{b}$ 倍した図形である．

Th 2.7（楕円の面積）

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ の面積は $S = \pi ab$.

証明　半径 a の円の面積は πa^2 である．楕円の面積はこれを $\dfrac{b}{a}$ 倍して，$S = \pi ab$.　□

2.3　双曲線

Def 2.8（双曲線）

2 つの定点 F，F′ からの距離の差が一定である点の軌跡を **双曲線** という．点 F，F′ を双曲線の **焦点**，線分 FF′ の中点を双曲線の **中心** といい，直線 FF′ と双曲線の交点を双曲線の **頂点** という．

例 2.9（双曲線の標準形）　$0 < a < c$ に対して $\mathrm{F}(c, 0)$，$\mathrm{F}'(-c, 0)$ とする．点 $\mathrm{P}(x, y)$ に対して，$\left|\mathrm{PF} - \mathrm{PF}'\right| = 2a$ であるとすると

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \mathrm{PF} - \mathrm{PF}' = \pm 2a.$$

左辺の第 2 項目を右辺に移項して，両辺の平方をとると

$$(x-c)^2 + y^2 = (x+c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 4a^2 \quad \Longleftrightarrow \quad a^2 + cx = \mp a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

再び両辺の平方をとれば，

$$a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 = a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 \iff \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

である．$c^2 - a^2 = b^2$ とおくと

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{2.9}$$

を得る．$0 < b < c$ に対しては，$\mathrm{F}(0, c)$，$\mathrm{F}'(0, -c)$ として，距離の差を $2b$ とする．$a^2 = c^2 - b^2$ とおけば，(2.9) と同様にして

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \tag{2.10}$$

を得る．双曲線 (2.9) については

$$\text{焦点 } (\sqrt{a^2+b^2}, 0),\ (-\sqrt{a^2+b^2}, 0), \qquad \text{頂点 } (a, 0),\ (-a, 0)$$

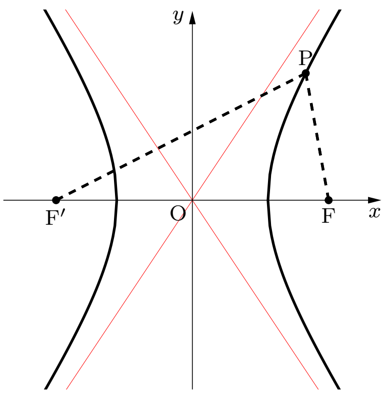
であり，双曲線 (2.10) については

$$\text{焦点 } (0, \sqrt{a^2+b^2}),\ (0, -\sqrt{a^2+b^2}), \qquad \text{頂点 } (0, b),\ (0, -b)$$

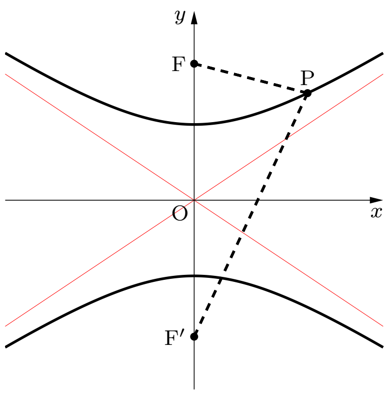
である．(2.9)，(2.10) を **双曲線の標準形** という．また，どちらの標準形も直線 $y = \pm\dfrac{b}{a}x$ を漸近線*7にもつ．２つの漸近線が直交する双曲線を **直角双曲線** という．標準形では $a = b$ のときである．標準形ではないが，反比例の式 $y = \dfrac{1}{x}$ のグラフも直角双曲線であり*8，漸近線は x 軸と y 軸である．

双曲線 (2.9) は y 軸との交点を持たず，双曲線 (2.10) は x 軸との交点を持たない．

標準形 (2.9) のグラフ



標準形 (2.10) のグラフ



例 2.10　反比例のグラフ $xy = 1$ は直角双曲線である．

∵　Th 2.2 より，反比例の式 $xy = 1$ を点 (x, y) を原点を中心として角度 θ　$(0 \leqq \theta < 2\pi)$ だけ回転させたグラフの方程式は

$$1 = (x\cos\theta + y\sin\theta)(-x\sin\theta + y\cos\theta) = -\frac{1}{2}x^2\sin 2\theta + xy\cos 2\theta + \frac{1}{2}y^2\sin 2\theta \tag{2.11}$$

*7 グラフが限りなく近づく直線のことである．例えば，関数 $y = \log_2 x$ のグラフにおける y 軸などがある（参考: 8 章）．
*8 例 2.10 で示す．

である．この式を標準形にするためには xy の項を消せばよいので，$\cos 2\theta = 0$ すなわち $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ または $\theta = \dfrac{3}{4}\pi$ とすればよい．$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ を代入して変形すれば，(2.11) は

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 = -1$$

である．これは直角双曲線であるから，45° 回転する前の式 $xy = 1$ のグラフは直角双曲線である．なお，$\theta = \dfrac{3}{4}\pi$ を代入して変形すれば

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 = 1$$

を得るが，これもやはり直角双曲線である．□

2.4　２次曲線の接線

直線 $ax + by + c = 0$ と 2 次曲線の方程式 $F(x, y) = 0$ から y を消去して得られる 2 次方程式の判別式を D とするとき，次が成り立つ;

1) $D > 0$ のとき，2 次曲線と直線は異なる 2 点を共有する．
2) $D = 0$ のとき，2 次曲線と直線は 1 点を共有する（接する）．
3) $D < 0$ のとき，2 次曲線と直線は共有点を持たない．

例 2.11　直線 $y = mx + n$ と楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ が接するような n の条件を求める．直線の方程式を楕円の方程式に代入して y を消去し，整理すると，2 次方程式

$$(a^2m^2 + b^2)x^2 + 2a^2mnx + a^2(n^2 - b^2) = 0$$

を得る．直線と楕円が接するためには，上の 2 次方程式に対する判別式 D が 0 となればよいから

$$0 = D = (a^2mn)^2 - (a^2m^2 + b^2) \cdot a^2(n^2 - b^2) = a^2b^2(a^2m^2 - n^2 + b^2)$$

である．楕円の方程式の形から $ab \neq 0$ となるから，$a^2m^2 - n^2 + b^2 = 0$ である．したがって

$$n = \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

が求める条件である．なお，このときの直線の方程式は

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

と表される．□

この例は傾きが m であるような楕円の接線の方程式にほかならない．2 次曲線の接線はこのような図形の位置関係を用いた考察で求められるだけでなく，8 章「微分法の応用」で扱う方法を用いて求めることもできる．ここでは結果だけを載せる．

Th 2.12（２次曲線の接線の方程式）

(1)　放物線

(a)　放物線 $y^2 = 4px$ 上の点 (s, t) における接線の方程式は

$$ty = 2p(x + s)$$

(b)　放物線 $y^2 = 4px$ の接線で，傾きが m であるものの方程式は

$$y = mx + \frac{p}{m}$$

(2)　楕円

(a)　楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 (s, t) における接線の方程式は

$$\frac{sx}{a^2} + \frac{ty}{b^2} = 1$$

(b)　楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ の接線で，傾きが m であるものの方程式は

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

(3)　双曲線

(a)　双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \pm 1$ 上の点 (s, t) における接線の方程式は

$$\frac{sx}{a^2} - \frac{ty}{b^2} = \pm 1$$

(b)　双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \pm 1$ の接線で，傾きが m $\left(m \neq \pm\dfrac{b}{a}\right)$ であるものの方程式は

$$y = mx \pm \sqrt{\pm a^2m^2 \mp b^2}$$

2.5　離心率

Def 2.13（離心率）

F を定点，ℓ を F を通らない定直線とし，ℓ と点 P との距離を d とする．比

$$e = \frac{\mathrm{PF}}{d}$$

が一定であるとき，e を 離心率 という．

Th 2.14（２次曲線の分類）

e を定点 F，定直線 ℓ および点 P から定まる離心率とする．e の値によって，点 P の軌跡は次の図形を描く．

1) $0 < e < 1$ のとき F を 1 つの焦点とする楕円（直線 ℓ とは共有点を持たず，長軸は ℓ と直交する）.

2) $e = 1$ のとき F を焦点，直線 ℓ を準線とする放物線.

3) $1 < e$ のとき F を焦点の 1 つとする双曲線（もう一方の焦点は直線 ℓ に関して点 F と対称な点）.

Remark 離心率 e を用いて放物線，楕円，双曲線を統一的に定義する流儀もある．

例 2.15 $a > 0$ とする．点 $\mathrm{P}(x, y)$ は点 $\mathrm{F}(a, 0)$ との距離 PF と直線 $\ell : x = -a$ との距離 d の比 $\dfrac{\mathrm{PF}}{d}$ が一定の値 e をとるとする．このときの点 P の軌跡を考える．

$$\mathrm{PF} = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}, \quad d = x - (-a) = x + a$$

であるから

$$e = \frac{\mathrm{PF}}{d} = \frac{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}{x+a} \quad \text{すなわち} \quad e(x+a) = \sqrt{(x-a)^2+y^2}$$

が成り立つ．両辺の平方をとって整理すると

$$(e^2-1)x^2 + 2a(e^2+1)x - y^2 = a^2(1-e^2) \tag{2.12}$$

を得る．

(a) $e = 1$ のとき，(2.12) は

$$y^2 = 4ax$$

と変形できる．これは放物線の方程式である．

(b) $e \neq 1$ のとき，(2.12) は x についての平方完成により

$$(e^2-1)\left(x + \frac{e^2+1}{e^2-1}a\right)^2 - y^2 = \frac{4a^2e^2}{e^2-1}$$

を得る．左辺が 1 になるように整理すれば

$$\frac{\left(x + \dfrac{e^2+1}{e^2-1}a\right)^2}{\left(\dfrac{2ae}{1-e^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\dfrac{4a^2e^2}{1-e^2}} = 1$$

と変形できる．$0 < e < 1$ であれば $\dfrac{4a^2e^2}{1-e^2} > 0$ ゆえにこれは楕円の方程式であり，$e > 1$ であれば $\dfrac{4a^2e^2}{1-e^2} < 0$ ゆえにこれは双曲線の方程式である． □

3　媒介変数表示と極座標

3.1　媒介変数表示

点 P の t 秒後の座標が (t, t^2) であるとすると，この点は原点から出発し，1 秒後に $(1,1)$, 2 秒後に $(2,4), \cdots$ と進んでいく．0.5 秒後 や 0.3 秒後 など，時間の間隔を短くしていけば，点 P の軌跡は放物線

$$y = x^2$$

を描くことがわかる．

一般に，曲線 C 上の任意の点 P の座標 (x, y) が変数 t を用いて

$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

と表されるとき，これを t を媒介変数とする曲線 C の **媒介変数表示** という．この媒介変数表示が表す図形は，点 $\mathrm{P}(f(t), g(t))$ の軌跡となる．主な曲線の媒介変数表示として，例えば次のものが知られている．

Th 3.1（図形の媒介変数表示）

1) 直線

   (a) 点 (p, q) を通り，x 軸の正の向きと角 α をなす

   $$x = p + t\cos\alpha, \quad y = q + t\sin\alpha$$

   (b) 点 (p, q) を通り，傾きが $\dfrac{b}{a}$

   $$x = p + at, \quad y = q + bt$$

   (c) 2 点 (x_A, y_A)，(x_B, y_B) を通る

   $$x = x_A + (x_B - x_A)t, \quad y = y_A + (y_B - y_A)t$$

2) 円　中心が (a, b)，半径 r : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

$$x = a + r\cos t, \quad y = b + r\sin t$$

3) 楕円　$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t$$

4) 双曲線　$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$$x = \frac{a}{\cos t}, \quad y = b\tan t$$

5) 放物線　$y^2 = 4px$

$$x = pt^2, \quad y = 2pt$$

6) Cycloid [*9]

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

[*9] 円が直線上を滑らずに転がるときの，円周上のある点 P の軌跡．グラフは 8 章 で扱う．

加減法，代入法や三角関数の相互関係を用いて媒介変数 t を消去することができれば，x, y を用いた図形の方程式を得る．一方で cycloid のように，x, y の式で表すことができない図形も存在する（演習問題 3.??）．また，楕円や双曲線の方程式は媒介変数表示することで，三角関数の問題に帰着させることができる．

Th 3.2（媒介変数表示された曲線の平行移動）

t を媒介変数として

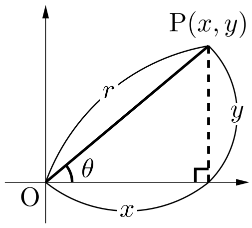
$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

で表された曲線を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した曲線の媒介変数表示は

$$x = f(t) + p, \quad y = g(t) + q$$

3.2 極座標

平面上で点 O と半直線 OX を定めると，平面上の点 P の位置は，O からの距離 r と OX から OP へ測った角 θ によって決まる．このとき，実数の組 (r, θ) を点 P の **極座標** という．また，基準となる点 O を **極**，半直線 OX を **始線**，角 θ を P の **偏角** という．



Remark x 座標と y 座標の組 (x, y) で表された座標を **直交座標** という．

極座標 (r, θ) と直交座標 (x, y) の関係は次のようになる．

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Remark 極座標 (r, θ) を用いるときは，θ は弧度法（ラジアン）を用いる．

Th 3.3（２点間の距離と三角形の面積）

O を極とする．極座標で表された 2 点 A(r_1, θ_1)，B(r_2, θ_2) に対して

1) $\mathrm{AB} = \sqrt{{r_1}^2 + {r_2}^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$

2) $\triangle\mathrm{OAB} = \dfrac{1}{2}r_1r_2|\sin(\theta_2 - \theta_1)|$

$\because$ それぞれ 余弦定理:

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - 2\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cdot\cos(\theta_2 - \theta_1)$$

及び面積の公式:

$$\triangle\mathrm{OAB} = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cdot\sin(\theta_2 - \theta_1)$$

に極座標を代入すればよい．ただし

$$\sin(\theta_2 - \theta_1) = -\sin(\theta_1 - \theta_2), \quad \cos(\theta_2 - \theta_1) = \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

に注意せよ． □

3.3　極方程式

Th 3.4（図形の極表示）

点の座標はすべて極座標 (r, θ) で表されているものとする．

1)　直線

(a)　極を通り始線と角 α をなす直線

$$\theta = \alpha$$

(b)　$\mathrm{H}(p, \alpha)$ を通り，OH に垂直な直線

$$r\cos(\theta - \alpha) = p$$

2)　円

(a)　極 O が中心，半径 a の円

$$r = a$$

(b)　$\mathrm{C}(a, 0)$ が中心，半径 a の円

$$r = 2a\cos\theta$$

(c)　$\mathrm{C}(c, \alpha)$ が中心，半径 a の円

$$r^2 - 2cr\cos(\theta - \alpha) + c^2 = a^2$$

Remark　極方程式が表す図形は，極座標と直交座標の関係を用いて直交座標での方程式に表すことができる．

例 3.5　極方程式 $r = \dfrac{2}{\cos\theta + \sin\theta}$ は直線 $y = -x + 2$ を表す．

∵

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

を代入すると

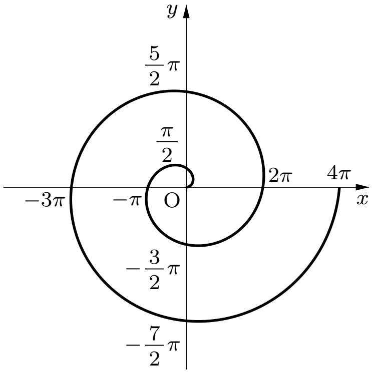
$$2 = r(\cos\theta + \sin\theta) = r\left(\frac{x}{r} + \frac{y}{r}\right) = x + y.$$

よって直線 $y = -x + 2$ を表す．　□

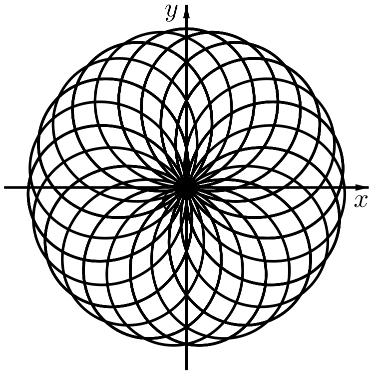
次の図はコンピュータを用いて，極方程式が表すグラフを描画したものである．なお，a を正の定数，n を自然数として

- $r = a\theta$ で表される曲線を Archimedes の螺旋
- $r = a\sin n\theta$ または $r = a\cos n\theta$ で表される曲線を バラ曲線

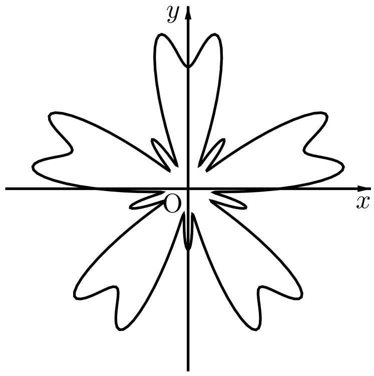
という．バラ曲線は n が奇数であれば n 枚，n が偶数であれば $2n$ 枚の花弁をもつ花のような図形を描くが，図では n に自然数でない値を代入したものを示す．



$r = \theta \quad (0 \leqq \theta \leqq 4\pi)$ のグラフ



$r = \sin(23\theta/19)$ のグラフ



$r = 1.5 + \sin 5\theta + 0.5 \sin 15\theta$ のグラフ

4　関数

数の集合 X, Y があって，X に属するすべての要素 x に対して，対応する Y の要素 y がただ 1 つ定まるとき，この y の値を $f(x)$ と表し，$y=f(x)$ とかく．これを関数 $y=f(x)$ あるいは関数 $f(x)$ と表現する．また，このとき y は x の **関数** であるといい，集合 X を関数 $f(x)$ の **定義域**，集合 Y の中から対応すると要素だけを集めた集合 $\widetilde{Y}$ を関数 $f(x)$ の **値域** という．

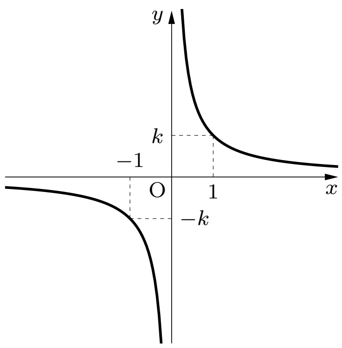
すなわち，定義域とは x の取り得る値の範囲，値域とは $f(x)$（あるいは y）の取り得る値の範囲である．

4.1　分数関数

変数 x の分数式で表される関数を，x の **分数関数** という．分数関数では，分母が 0 になるような x は定義域に含まれない．

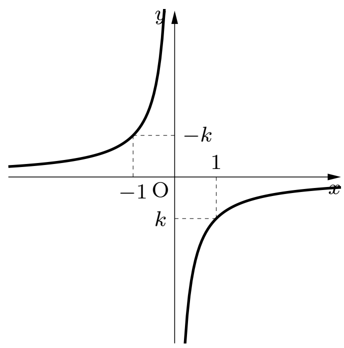
分数関数 $y=\dfrac{k}{x}$　$(k \neq 0)$ のグラフは x 軸と y 軸を漸近線にもつ直角双曲線であり，原点に関して対称である．

$\boxed{k>0 \text{ のとき}}$



定義域は $x \neq 0$，値域は $y \neq 0$．

$\boxed{k<0 \text{ のとき}}$



定義域は $x \neq 0$，値域は $y \neq 0$．

このグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した直角双曲線の式 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ である．漸近線は直線 $x=p$，$y=q$ で，点 (p,q) に関して対称である．

また，分数関数 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$　$(c \neq 0,\ ad-bc \neq 0)$ は，$ax+b$ を $cx+d$ で割った商を q，余りを r とすると，$y=\dfrac{r}{cx-d}+q=\dfrac{k}{x-p}+q$ の形に変形できる．

例 4.1　$4x+1$ を $2x+1$ で割った商は 2，余りは -1 である．よって $\dfrac{4x+1}{2x+1}=-\dfrac{1}{2x+1}+2$ であるから，分数関数 $y=\dfrac{4x+1}{2x+1}$ は $y=-\dfrac{1}{2x}$ を x 軸方向に $-\dfrac{1}{2}$，y 軸方向に 2 だけ平行移動した直角双曲線である．

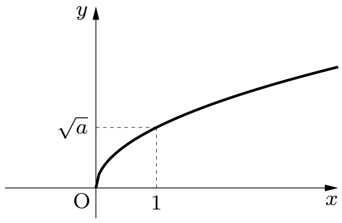
4.2　無理関数

根号の中に変数 x を含む式を，x についての 無理式 といい，x の無理式で表される関数を x の 無理関数 という．無理関数では根号の中が負になるような x の値は定義域に含まない．

例 4.2　$y=\sqrt{-2x}$，$y=\sqrt{x-3}$ の定義域は，それぞれ $x \leqq 0$,　$x \geqq 3$ である．　□

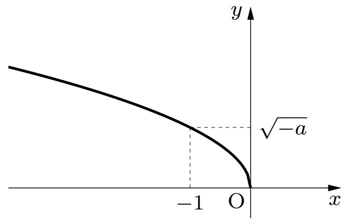
$y=\sqrt{ax}$　$(a \neq 0)$ のグラフは放物線 $y^2=ax$ のグラフの x 軸および x 軸の上側の部分である．

$\boxed{a>0 \text{ のとき}}$



定義域は $x \geqq 0$，値域は $y \geqq 0$.

$\boxed{a<0 \text{ のとき}}$



定義域は $x \leqq 0$，値域は $y \geqq 0$.

$y=-\sqrt{ax}$　$(a \neq 0)$ のグラフは，$y=\sqrt{ax}$ のグラフを x 軸に関して対称移動したグラフである．

$y=\sqrt{a(x-p)}+q$　$(a \neq 0)$ のグラフは $y=\sqrt{ax}$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したグラフである．

$y=\sqrt{ax+b}$　$(a \neq 0)$ のグラフは，$y=\sqrt{ax}$ のグラフを x 軸方向に $-\dfrac{b}{a}$ だけ平行移動したグラフである．

4.3　逆関数と合成関数

y を x の関数とし，定義域を X，値域を Y とする．Y に属するすべての数 y に対して，$y=f(x)$ となる X の要素 x がただ 1 つ存在するならば，x もまた y の関数と考えられる．この関数を $y=f(x)$ の 逆関数 といい，$x=f^{-1}(y)$ と表す．一般には，値域と定義域を入れかえて（つまり x と y を交換して）$y=f^{-1}(x)$ と表すことが多い．

Prop 4.3（逆関数の性質）

1)　関数 $y=f(x)$ とその逆関数 $y=f^{-1}(x)$ のグラフは，直線 $y=x$ に関して対称である．
2)　関数 $y=f(x)$ とその逆関数 $y=f^{-1}(x)$ では，定義域と値域が入れかわる．
3)　逆関数の逆関数は元の関数である．すなわち，$(f^{-1})^{-1}(x)=f(x)$.

関数 $y=f(x)$ の逆関数を求めるときは，x と y を入れ替えた方程式 $x=f(y)$ を y について解けばよい．

例 4.4　関数 $y = x^2$ は逆関数が存在しないが，関数 $y = x^2 \quad (x \geqq 0)$ は逆関数 $y = \sqrt{x}$ が存在する．　□

例 4.5　常用対数関数 $f(x) = \log_{10} x$ の逆関数は指数関数 $f^{-1}(x) = 10^x$ である．　□

f を集合 X を定義域，集合 Z を値域とする関数，g を集合 Z を定義域，集合 Y を値域とする関数 であるとする．このとき，X のすべての要素 x に対して Z の要素 $z = f(x)$ が定まり，この z に対して Y の要素 $y = g(z) = g(f(x))$ が定まる．このようにして得られる関数 $y = g(f(x))$ を f と g の 合成関数 といい，$y = (g \circ f)(x)$ とかく．この関数の定義域は X，値域は Y である．

Remark　一般に，$(g \circ f)(x)$ と $(f \circ g)(x)$ は一致しない．

例 4.6　$f(x) = x^2$, $g(x) = x + 1$ に対して

- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2$　　定義域は実数全体，値域は $y \geqq 0$.
- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1$　　定義域は実数全体，値域は $y \geqq 1$.　□

Th 4.7

関数 $y = f(x)$ とその逆関数 $y = f^{-1}(x)$ について

$$(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x) = x$$

が成り立つ．

証明　逆関数の定義より，$y = f(x)$ を満たす x, y に対して $x = f^{-1}(y)$ が成り立つから

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$$

である．また，f^{-1} の逆関数は f であるから，$(f \circ f^{-1})(x) = x$ も成り立つ．

5　数列と極限

5.1　数列の極限

どんな実数よりも大きいようなものを 正の無限大 といい，記号 ∞ で表す．逆にどんな実数よりも小さいようなものを 負の無限大 といい，記号 $-\infty$ で表す．∞ や $-\infty$ には四則演算（$+\ -\ \times \div$）は定義されない．

数列 $\{a_n\}$ において，n を限りなく大きくしたときに $\{a_n\}$ が近づいていく値を，「近づける」ことを表現する記号 lim を用いて

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

と表す．

Def 5.1（数列の収束・発散）

α を $\pm\infty$ ではない実数とする．数列 $\{a_n\}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

が成り立つとき，$\{a_n\}$ は α に 収束 するという．収束しないとき，その数列は 発散 するという．

数列の発散について，特に次のように分類できる．

1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ のとき，$\{a_n\}$ は 正の無限大に発散するという．

2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ のとき，$\{a_n\}$ は 負の無限大に発散するという．

3) $\{a_n\}$ が収束せず，正の無限大にも負の無限大にも発散しないとき，$\{a_n\}$ は 振動 するという．

Remark　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ を

$$a_n \longrightarrow \alpha \quad (n \to \infty), \qquad a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$$

などと書くこともある．$\{a_n\}$ が 正または負の無限大に発散する場合も同様である．

例 5.2　$\alpha > 0$ に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} = \infty$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 0$ である．

例 5.3（無限等比数列）　無限等比数列 $\{r^n\}$ の極限は

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & (|r| < 1) \\ 1 & (r = 1) \\ \infty & (r > 1) \\ \text{振動する} & (r \leqq -1) \end{cases}$$

Prop 5.4

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が収束して，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ であるとき，次が成り立つ．

1) $\lim_{n\to\infty} ka_n = k\alpha$ （k は定数）

2) $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$

3) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$

4) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$ （$\beta \neq 0$）

Remark 極限は同時に取らなければならない．例えば

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2+4}$$

を考えるとき，分母の極限を先に考えれば 0 になるが，分子の極限を先に考えれば ∞ に発散する．なお，この極限は 1 に収束する．

極限が $\infty - \infty$，$\infty \times 0$，1^∞，∞/∞ のような形になるものを 不定形 という．不定形の極限値は

- 不定形でない形に変形してから極限をとる
- 極限に関する公式を用いる

のどちらかの方法で求める．

Remark $\infty + \infty = \infty$，$\infty \times \infty = \infty$ は不定形ではない．どちらも $+\infty$ である．

例 5.5（不定形の極限）

1) （$\infty - \infty$ 型の不定形）
   - $\lim_{n\to\infty} (n^3 - n^3) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$
   - $\lim_{n\to\infty} (n^2 - n^3) = \lim_{n\to\infty} n^2(1-n) = \infty \times (-\infty) = -\infty.$

2) （$\infty \times 0$ 型の不定形）
   - $\lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$
   - $\lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

3) （∞/∞ 型の不定形）
   - $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$
   - $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n-4} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{3-\frac{4}{n}} = \frac{2+0}{3-0} = \frac{2}{3}.$
   - $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+1}{3^n-4} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^n}{3^n}+\frac{1}{3^n}}{1-\frac{4}{3^n}} = \frac{0+0}{1-0} = 0.$

Th 5.6

すべての n に対して $a_n \leqq b_n$ であるとする．このとき

1) $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \beta \quad \Longrightarrow \quad \alpha \leqq \beta.$

2) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \infty.$

証明　巻末の付録を参照.

Remark　$a_n < b_n$ であっても，$\alpha = \beta$ となることがある．例えば

$$a_n = \frac{2n-1}{n}, \quad b_n = \frac{2n+1}{n}$$

はどのような n に対しても $a_n < b_n$ であるが，どちらも 2 に収束する．

Th 5.7（はさみうちの原理）

すべての n に対して $a_n \leqq c_n \leqq b_n$ であるとき

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha.$$

証明　高校数学の範囲での証明は難しい.

例 5.8　$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} = 0.$

∵

$$0 \leqq |\cos n| \leqq 1$$

であるから

$$0 \leqq \left|\frac{\cos n}{n}\right| \leqq \frac{1}{|n|}$$

が成り立つ．ここで

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|n|} = 0$$

であるから，Th 5.7 はさみうちの原理より，求める極限は 0 である．　□

Prop 5.9

$\{a_n\}$ が α に収束するとき

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_{n-1} = \alpha.$$

すなわち，数列をどこからはじめてもその極限は等しい．この結果により，漸化式が与えられた数列が収束すると仮定した場合の収束値が推定できる．ただし，数列が収束しない場合は，この結果を用いることはできない．

例 5.10

1) $a_{n+1}=\sqrt{2a_n+3}$，$a_1=1$ を満たす数列 $\{a_n\}$ は 3 に収束する．

2) $a_{n+1}=2a_n+3$，$a_1=1$ を満たす数列 $\{a_n\}$ は発散する．

∵ 1) はじめに，収束すると仮定して極限を調べる．極限を α とおき，漸化式において $n\to\infty$ とすれば

$$\alpha=\sqrt{2\alpha+3}\quad \text{より}\quad \alpha=3$$

を得る（式の右辺は 0 以上だから，$\alpha\geqq 0$ であり，$\alpha=-1$ は不適）．よって極限は 3 であると推定できる．以下，極限を実際に求める方法を載せる．

すべての n に対して $1\leqq a_n$ であることを数学的帰納法で示す．$n=k$ のときに $1\leqq a_k$ を仮定すると

$$2\leqq 2a_k,\quad 5\leqq 2a_k+3,\quad \sqrt{5}\leqq\sqrt{2a_k+3},\quad 1\leqq\sqrt{5}\leqq\sqrt{2a_k+3}=a_{k+1}$$

となるから，$n=k+1$ のときも成り立つ．$n=1$ での成立も明らかだから，$1\leqq a_n$ はすべての自然数 n で成り立つ．ここで

$$\begin{aligned}|a_n-3|=\left|\sqrt{2a_{n-1}+3}-3\right|&=\left|\frac{\left(\sqrt{2a_{n-1}+3}-3\right)\left(\sqrt{2a_{n-1}+3}+3\right)}{\sqrt{2a_{n-1}+3}+3}\right|\\&=\left|\frac{2a_{n-1}-6}{a_n+3}\right|=\left|\frac{2}{a_n+3}\right||a_{n-1}-3|\leqq\frac{1}{2}|a_{n-1}-3|\end{aligned}$$

と計算できるが，この不等式を繰り返し用いると

$$|a_n-3|\leqq\frac{1}{2}|a_{n-1}-3|\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^2|a_{n-2}-3|\leqq\cdots\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|a_1-3|=2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

を得る．$n\to\infty$ の極限を考えれば，はさみうちの原理より，$\{a_n-3\}$ は 0 に収束することが判るから，$\{a_n\}$ は 3 に収束する． □

2) 特性方程式を用いて一般項を求めると $a_n=-3+2^{n+1}$ であるから，$a_n\to\infty\quad(n\to\infty)$． □

Remark 正の無限大に発散する数列にも，発散する強さのようなものがある．例えば，$a>1$ として

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n^a}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^a}{a^n}=0,\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n^a}{\log_a n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{\log_a n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n^a}=\infty$$

が成り立つ．これは収束する強さが極端に異なる例であり，0 に収束するときは分母の数列の発散する強さが大きい．逆に，数列が 0 でない値に収束するときは，その数列は発散する強さがほとんど変わらないような数列どうしの不定形になっているといえる．

例 5.11 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0\quad(a>1)$ である．

証明 $a>1$ であるから，ある $h>0$ を用いて $a=1+h$ と表すことができる．二項定理より，

$$a^n=(1+h)^n=1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\cdots+h^n\geqq 1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2$$

が成り立つ．$n,h>0$ より両辺ともに正であるから，その逆数について

$$0\leqq\frac{1}{a^n}\leqq\frac{1}{1+nh+\dfrac{n(n-1)}{2}h^2}$$

である．さらに両辺を $n\ (>0)$ 倍して

$$0\leqq\frac{n}{a^n}\leqq\frac{n}{1+nh+\dfrac{n(n-1)}{2}h^2}=\frac{\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{h}{n}+\dfrac{h^2}{2}-\dfrac{h^2}{2n}}\longrightarrow 0\quad(n\to\infty)$$ □

5.2　無限級数

Def 5.12（無限級数）

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

を 無限級数 （または級数）といい，その値を極限

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} a_n$$

によって定める．この極限が収束するとき，その値を 無限級数の和 という．また，$\displaystyle\sum_{n=1}^{N} a_n$ を第 N 項までの 部分和 という．

Prop 5.13（無限等比級数）

初項 a，公比 r の等比数列 $\{ar^{n-1}\}$ に対する無限級数を 無限等比級数 という．その和は

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{a}{1-r} & (|r|<1) \\ \text{発散} & (|r| \geqq 1) \end{cases}$$

証明　初項 a，公比 r の等比数列の和は

$$\sum_{n=1}^{N} ar^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{a(1-r^N)}{1-r} & (r \neq 1) \\ Na & (r = 1) \end{cases}$$

であったから，無限等比級数の和はこの極限を考えて

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{a}{1-r} & (|r|<1) \\ \text{発散} & (|r| \geqq 1) \end{cases}$$

である．□

Remark　等比数列は $-1 < r \leqq 1$ で収束するが，等比級数は $-1 < r < 1 \iff |r| < 1$ で収束する．

無限級数は部分和の極限で定義されるから，数列の極限と同様の性質が成り立つ．

Prop 5.14

2 つの無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ がそれぞれ S，T に収束するとき，次が成り立つ．

1) $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n = kS \quad (k$ は定数$)$.　　2) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = S \pm T$.

例 5.15 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3^n}{6^n} - \frac{2^n}{6^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$

Th 5.16

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{が収束する} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

証明

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$$

とおく．この数列は収束しているとして，その値を S とする．Prop 5.9 より

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} S_{N-1} = S$$

が成り立つ．また

$$a_N = S_N - S_{N-1}$$

であるから，両辺の $N \to \infty$ の極限を考えれば

$$\lim_{N\to\infty} a_N = \lim_{N\to\infty}(S_N - S_{N-1}) = \lim_{N\to\infty} S_N - \lim_{N\to\infty} S_{N-1} = S - S = 0 \qquad \square$$

Remark　逆は成り立たない:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \text{であっても} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{が収束するとは限らない．}$$

$\to$ 例 5.18

例 5.17 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+1}$ は発散する．

$\because$　Th 5.16 の対偶命題は

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{は発散する}$$

である．いま

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{1+\frac{1}{n}} = \infty$$

であるから，この級数は発散する．　$\square$

例 5.18（調和級数）　調和級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ は発散する．

∵　$0<a<b$ のとき $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$ が成り立つから

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}&=\frac{1}{1}+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\\&>1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\\&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots=\infty.\end{aligned}$$

ゆえに級数は発散する．一方

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

である．□

5.3　演習問題

⋆⋆ ♢ ⋆⋆ ♣ ⋆⋆　5.1 節　⋆⋆ ♡ ⋆⋆ ♠ ⋆⋆

5.1　次の極限の収束・発散を調べよ．ただし，収束する場合は極限値を求めよ．

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n^5-n^3)$　　(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4n+3}{3n+5}$

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2^{n+4}-3^n)$　　(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^n-5^{n+1}}{3^n+8^{n+2}}$

(5)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^2+3n+2}-3n\right)$　　(6)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n^2}{\sqrt{n}}$

(7)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\cos\frac{120\pi}{n}$　　(8)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$

5.2　次の漸化式で定まる数列 $\{a_n\}$ の収束・発散を調べよ．ただし，収束する場合は極限値を求めよ．

(1)　$4a_{n+1}=3a_n+2$，$a_1=1$　　(2)　$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2+a_n}$，$a_1=1$

5.3　1 から 5 までの数字が 1 つずつ書かれた 5 個の玉が袋に入っている．この箱から 1 つの玉を取り出し，数字を記録してから袋に戻す試行を n 回行う．n 回目までのすべての数字の和が奇数になる確率を P_n とおく．

(1)　P_1 を求めよ．また，P_n を n の式で表せ．

(2)　a を実数とする．極限

$$\lim_{n\to\infty}a^n\left(P_n-\frac{1}{2}\right)$$

が収束するための a の必要十分条件と，そのときの極限を求めよ．

5.4　曲線 $C\colon y=x^2-2$ に対して，点 $\mathrm{T}_0(2,2)$ における C の接線を ℓ_0，ℓ_0 と x 軸の交点の x 座標を a_1 とする．$n=1,2,\ldots$ に対して，C 上で x 座標が a_n である点を T_n，点 T_n における C の接線を ℓ_n，ℓ_n と x 軸の交点の x 座標を a_{n+1} と帰納的に定める．

(1) a_1 を求めよ．また，a_{n+1} を a_n を用いて表せ．

(2) すべての自然数 n に対して $a_n \geqq \sqrt{2}$ が成り立つことを示し，これを利用して

$$a_{n+1} - \sqrt{2} \leqq \frac{1}{2}\left(a_n - \sqrt{2}\right)$$

が成り立つことを示せ．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

⋆⋆ ♢ ⋆⋆ ♣ ⋆⋆　5.2 節　⋆⋆ ♡ ⋆⋆ ♠ ⋆⋆

5.5 次の無限級数の収束・発散を調べよ．収束する場合はその和を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{7^{n-1}}$　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n + 3^{n+1}}{6^n}$　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \cos n\pi$　(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}+n}$　(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$

5.6 次の漸化式で定まる数列 $\{a_n\}$ の収束・発散を調べよ．ただし，収束する場合は極限値を求めよ．

(1) $a_{n+1} = a_n + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$，$a_1 = 1$　(2) $2a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n$，$a_1 = 1$，$a_2 = 2$

5.7 次の無限級数が収束するような実数 x の値の範囲を求めよ．また，そのときの和を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{3n}$　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (x^2-1)^{n-1}$　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{nx}$

5.8 数列 $\{S_n\}$, $\{s_n\}$　$(n = 1, 2, \ldots)$ を

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2, \quad s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2$$

で定めるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n$ が成り立つことを示せ．

5.9 ある小球を静かに地面に落とすと，常に落とした高さのちょうど e 倍の高さまで跳ね返る[*10]とする．いま，高さ h メートルの位置から小球を静かに落とす．球が地面に完全に静止するまでに上下する距離の総和を求めよ．ただし，$0 < e < 1$ であるとする．

5.10 点 P は原点から出発し，x 軸の正の方向に 1，y 軸の正の方向に $\dfrac{1}{2}$，x 軸の負の方向に $\dfrac{1}{4}$，y 軸の負の方向に $\dfrac{1}{8}$，再び x 軸の正の方向に $\dfrac{1}{16}$，$\cdots$ と移動する．点 P が限りなく近づく点の座標を求めよ．

5.11 円 C_1 は半径 1 の円で，x 軸と y 軸に接し，中心は第 1 象限にあるものとする．また，$n = 2, 3, \cdots$ に対し，円 C_n は半径が r_n で円 C_{n-1} 及び x 軸，y 軸のすべてに接する円のうち，円 C_{n-1} よりも小さい円であるとする．

[*10] このような e を跳ね返り係数 (反撥係数) という．

(1) 円 C_1 を表す方程式を求めよ．

(2) r_n を n を用いて表せ．

(3) 円 C_1 から円 C_n まで n 個の円について，面積の総和を求めよ．

5.12 数列 $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を $a_n = \dfrac{n}{2^n}$ で定める．無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束・発散を調べ，収束する場合はその和を求めよ．ただし必要であれば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であることは用いてよい．

5.13 2 つの数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ に対して，級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n^2$$

はいずれも収束しているとする．以下の問いに答えよ．

(1) どのような実数 t に対しても $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + t y_n)^2 \geqq 0$ が成り立つことを利用して，級数に対する Cauchy-Schwarz の不等式

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n\right)^2 \leqq \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2\right)$$

を証明せよ．

(2) 不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)2^n}} \leqq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

を示せ．ただし，左辺の級数が収束することは証明せずに用いてよい．

5.14 次の関数 $f(x)$ に対して，$y = f(x)$ のグラフをかけ．

(1) $f(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n-1}}{1 + x^{2n}}$ (2) $f(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1 + x}{1 + x^{2n}}$

*5.15 数列 $\{a_n\}$ を $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ で定める．次の (1)，(2) を解け．

(1) $n + 1$ 個の正の数 $p_1, p_2, \ldots, p_n, p_{n+1}$ に対して成り立つ次の不等式[*11]

$$\frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_n + p_{n+1}}{n + 1} \geqq \sqrt[n+1]{p_1 p_2 \cdots p_n p_{n+1}}$$

を $p_1 = 1$, $p_2 = p_3 = \cdots = p_n = p_{n+1} = \dfrac{n+1}{n}$ に対して適用し，$a_n \leqq a_{n+1}$ を示せ．

(2) 二項定理を用いて次の不等式

$$a_n \leqq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leqq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}$$

[*11] この不等式を（$n + 1$ 個の元に対する）相加平均と相乗平均の大小関係（AM-GM 不等式）という．等号成立条件は $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = p_{n+1}$ である．証明は巻末の付録を参照せよ．

を示し，$2 \leqq a_n \leqq 3$ であることを証明せよ．ただし，$0! = 1$ とする．

6 関数と極限

6.1 関数の極限

Def 6.1（関数の極限）

a, α を実数とする．関数 $f(x)$ に対して，x を a でない値をとりながら限りなく a に近づけたとき，どのように近づけたとしても $f(x)$ の値が α に限りなく近づくならば

$$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha \quad \text{または} \quad f(x) \longrightarrow \alpha \quad (x \to a)$$

と表す．$f(x)$ の値が限りなく大きく，あるいは小さくなるならば

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \quad \text{あるいは} \quad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

と表す．上のいずれの場合にもあてはまらない場合，$x \to a$ のときの $f(x)$ の極限はないという．

Remark $x \to \pm\infty$ の場合も同様に表す．これは $y = f(x)$ のグラフの y 軸から限りなく離れた位置を表している．

例 6.2 $f(x) = x^2$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$ について，$\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ であるが $\displaystyle\lim_{x\to 0} g(x)$ は存在しない．

$y = g(x)$ のグラフを考えると，x を 1 から徐々に 0 に近づけた場合は $g(x)$ は限りなく大きな値をとるが，逆に x を -1 から徐々に 0 に近づけた場合は $g(x)$ は限りなく小さな値をとり，近づけ方によって極限が変わる．後に改めて定義するが，このような関数を **不連続** であるという．

以下の 6.3 から 6.5 は $x \to \pm\infty$ であっても成り立つ．

Prop 6.3

$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$, $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x) = \beta$ であるとき，次が成り立つ．

1) $\displaystyle\lim_{x\to a} kf(x) = k\alpha \quad$ (k は定数)

2) $\displaystyle\lim_{x\to a} \{f(x) \pm g(x)\} = \alpha \pm \beta$

3) $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \alpha\beta$

4) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (\beta \neq 0)$

Prop 6.4

1) $x = a$ の近くで常に $f(x) \leqq g(x)$ であるとき，$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$, $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x) = \beta \quad \Longrightarrow \quad \alpha \leqq \beta$.

2) $x = a$ の近くで常に $f(x) \leqq g(x)$ であるとき，$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to a} g(x) = \infty$.

Remark $f(x) < g(x)$ であっても，$\alpha = \beta$ となることがある．

Th 6.5（はさみうちの原理）

$x = a$ の近くで常に $f(x) \leqq h(x) \leqq g(x)$ であるとき

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \alpha \quad\Longrightarrow\quad \lim_{x\to a} h(x) = \alpha.$$

連続な関数については Def 6.1 の定義で十分であるが，Ex 6.2 の $g(x)$ のように，不連続な関数については不十分である．そこで次のように定義を与える．

Def 6.6

1) x を a よりも大きな値をとりながら a に近づけるときの $f(x)$ の極限を 右側極限 といい

$$\lim_{x\to a+0} f(x)$$

と表す．

2) x を a よりも小さな値をとりながら a に近づけるときの $f(x)$ の極限を 左側極限 といい

$$\lim_{x\to a-0} f(x)$$

と表す．

3) 両側からの極限が存在して，かつ一致するとき，その値を $f(x)$ の $x \to a$ における極限と定める:

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x) = \alpha \quad\Longleftrightarrow\quad \lim_{x\to a} f(x) = \alpha.$$

Remark $x = 0$ の片側の極限は $x \to +0$, $x \to -0$ と表すこともある．

例 6.7 $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \tan\frac{x}{2}$ は存在しない．

∵

$$\lim_{x\to\pi+0} \tan\frac{x}{2} = -\infty, \qquad \lim_{x\to\pi-0} \tan\frac{x}{2} = \infty$$

である．両側からの極限が一致していないから，この極限は存在しない． □

Th 6.8

$$\lim_{x\to a} g(x) = 0 \quad \text{かつ} \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha \quad \text{（有限の値）} \quad\Longrightarrow\quad \lim_{x\to a} f(x) = 0.$$

証明 Prop 6.3 より

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot\frac{g(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}\cdot g(x) = \alpha\cdot 0 = 0.$$ □

例 6.9 $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{ax+b}{x-1} = 3$ が成り立つとき，$a = 3$，$b = -3$ である．

∵ $x \to 1$ のとき，分母 $x - 1$ は 0 に収束する．一方で左辺の極限全体は 3 に収束しているから，分子も 0 に収束する．したがって

$$0 = \lim_{x\to 1}(ax+b) = a + b \quad \text{すなわち} \quad b = -a.$$

このとき

$$3=\lim_{x\to1}\frac{ax+b}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{ax-a}{x-1}=\lim_{x\to1}a=a$$

であるから，$a=3,\ b=-3.$ □

数 II までに扱った関数の極限は，そのグラフから考える．

Prop 6.10（指数関数・対数関数の極限）

指数関数

1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}a^x=\begin{cases}0 & (0<a<1)\\ \infty & (a>1)\end{cases}$　　2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}a^x=\begin{cases}\infty & (0<a<1)\\ 0 & (a>1)\end{cases}$

対数関数

1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log_a x=\begin{cases}-\infty & (0<a<1)\\ +\infty & (a>1)\end{cases}$　　2) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\log_a x=\begin{cases}+\infty & (0<a<1)\\ -\infty & (a>1)\end{cases}$

例 6.11

- $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(2^x+2^{-x})=\infty,\quad \lim_{x\to-\infty}(2^x+2^{-x})=\infty.$
- $\displaystyle\lim_{x\to2+0}\{\log_2(x^2-4)-\log_2(x-2)\}=\lim_{x\to2+0}\log_2(x+2)=2.$

三角関数の極限の計算では，はさみうちの原理や以下の公式がよく用いられる．

Th 6.12（三角関数の極限の公式）

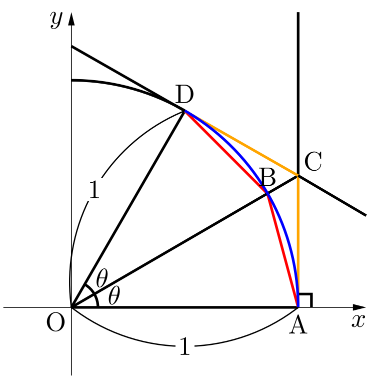
$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1.\quad\text{（ただし角の単位はラジアン）}$$

証明　$\sin(-\theta)=-\sin\theta$ に注意すれば

$$\lim_{\theta\to-0}\frac{\sin\theta}{\theta}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin(-\theta)}{-\theta}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\theta}{\theta}$$

であるから，右側極限について示せば十分である．

右図は半径 1 の四分円周上で 点 $\mathrm{A}(1,0)$ および $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}=\overset{\frown}{\mathrm{BD}}=\theta>0$ となるような点 B，D をとったものである．また，直線 AC は点 A における円の接線である．図より



$$\mathrm{AB}+\mathrm{BD}<\overset{\frown}{\mathrm{AD}}<\mathrm{AC}+\mathrm{CD}$$

であることが判る．また，$\overset{\frown}{\mathrm{AD}}=2\theta$ であって，$\triangle\mathrm{OAB}\equiv\triangle\mathrm{ODB}$ であるから $\mathrm{AB}=\mathrm{BD}$，$\mathrm{AC}=\mathrm{CD}$ が成り立つので，不等式

$$\mathrm{AB}<\theta<\mathrm{AC}\tag{6.13}$$

を得る．△OAB に対する余弦定理より

$$\mathrm{AB} = \sqrt{2(1-\cos\theta)}$$

であり，直角三角形に対する三角比の定義より

$$\mathrm{AC} = \mathrm{OA}\cdot\tan\theta = \tan\theta$$

であるから，(6.13) は

$$\frac{\sqrt{2}\sin\theta}{\sqrt{1+\cos\theta}} = \sqrt{2(1-\cos\theta)} < \theta < \tan\theta$$

と変形できる．ゆえに不等式

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\cos\theta}} < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

を得るが，はさみうちの原理より

$$\lim_{x\to+0}\frac{x}{\sin x} = 1$$

が示される． □

Remark 物理の波などの計算において，$|x| \ll 1$ のとき $\sin x \fallingdotseq x$ といった式変形をすることがある．これは上の極限の公式に基づき，x が 0 に限りなく近いときに $\dfrac{\sin x}{x} \fallingdotseq 1$ であることを意味している．

例 6.13

- $ab \neq 0$ のとき，$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{\sin bx} = \lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{ax}\cdot\frac{bx}{\sin bx}\cdot\frac{ax}{bx} = \frac{a}{b}$[*1].
- $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{u\to0}\frac{1}{u}\sin u = 1.$ $\quad\left(\dfrac{1}{x} = u \text{ とおいた.}\right)$
- $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x} = \lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x}\cdot\frac{\cos x+1}{\cos x+1} = \lim_{x\to0}-\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x+1} = -1\cdot\frac{0}{2} = 0.$

6.2 関数の連続性

Def 6.14

関数 $f(x)$ とその定義域に含まれた a に対して，$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$ が存在し，かつ $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ であるとき，関数 $f(x)$ は $x = a$ で **連続** であるという．連続でないとき，**不連続** であるという．

Prop 6.15

関数 $f(x)$，$g(x)$ がともに $x = a$ で連続であるとき，次の関数も $x = a$ で連続である．

1) $\alpha f(x) + \beta g(x)$ （α，β は定数） 2) $f(x)g(x)$

3) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ （$g(a) \neq 0$） 4) $f(g(x))$，$g(f(x))$

[*1] 最後の等号は次のようになる．$ax = u$，$bx = v$ とおくと $x \to 0$ のとき $u, v \to 0$ となり

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{ax}\cdot\frac{bx}{\sin bx}\cdot\frac{ax}{bx} = \lim_{\substack{u\to0\\v\to0}}\frac{\sin u}{u}\cdot\frac{v}{\sin v}\cdot\frac{a}{b} = 1\cdot1\cdot\frac{a}{b} = \frac{a}{b}.$$

連続な関数はグラフをかいたときにすべての点で繋がっている関数と考えてよい．逆に，不連続な関数にはグラフに繋がっていない点がある．例えば例 6.2 の $g(x) = \dfrac{1}{x}$ や 例 6.7 の $\tan\dfrac{x}{2}$ は，それぞれ $x = 0$, $x = \pi$ で不連続である．また，次の **Gauss 記号** も不連続な関数を作ることがある．

Comp 6.16（Gauss 記号）　[ ] を **Gauss 記号** といい，$[x]$ で x を超えない最大の整数を表す[*12]．すなわち

$$[x] = n \quad (n \leqq x < n+1)$$

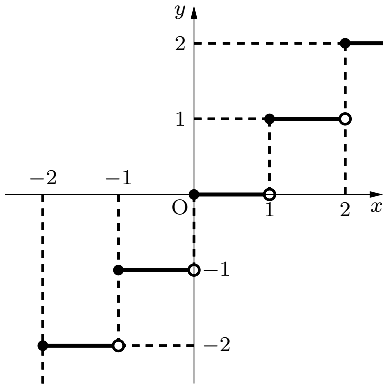
が成り立つ．例えば

$$[1] = 1, \quad [2.4] = 2, \quad [\pi] = 3, \quad [-1] = -1, \quad [-1.5] = -2$$

である．

例 6.17　すべての整数 k に対して，$y = [x]$ は $x = k$ で連続ではない．

☺　ガウス記号の定義より明らかである．なお，グラフは次のとおり．

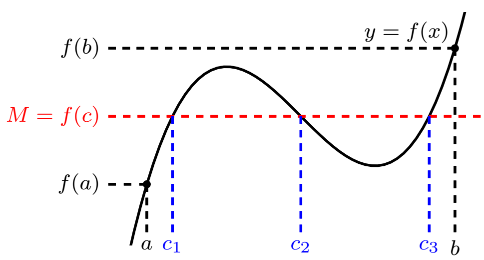


次の定理は高校数学の範囲では（より正確には高校数学での極限の定義では）厳密に証明することができないが，重要な定理である．数 III にはこのような定理がいくつかあるが，利用方法は覚えておくこと．

Th 6.18（中間値の定理）

関数 $f(x)$ が $a \leqq x \leqq b$ で連続で，$f(a) \neq f(b)$ ならば，$f(a)$ と $f(b)$ の間にあるすべての実数 M に対して，$f(c) = M$ かつ $a < c < b$ を満たす c が少なくとも 1 つ存在する．

右図にはグラフを用いた中間値の定理の直感的なイメージを示した．この定理 は 2 つの実数 a, b に対して $f(a)$ と $f(b)$ の間にある 実数 M を 1 つ決めて直線 $y = M$ を引けば，必ずグラフの $a \leqq x \leqq b$ 上のどこかで交わるということを主張している．なお，定理では「c が少なくとも 1 つ存在する」 であるが，この図では 条件を満たす c は 3 つ存在する．



[*12] 記号 ⌊ ⌋ を用いて表すこともある．また，関数 $f(x) = \lfloor x \rfloor$ は床関数ともよばれる．

$a \leqq x \leqq b$ で連続な関数 $f(x)$ が $f(a) < 0,\ f(b) > 0$ を満たすとすると，0 は $f(a) < 0 < f(b)$ を満たすから，中間値の定理より，$f(c) = 0$ かつ $a < c < b$ を満たす c が少なくとも 1 つ存在する．$f(a) > 0,\ f(b) < 0$ を満たす場合も同様のことがいえるから，次が成り立つ．

Cor 6.19

$a \leqq x \leqq b$ で連続な関数 $f(x)$ が $f(a)f(b) < 0$ を満たすならば，方程式 $f(x) = 0$ は $a < x < b$ に少なくとも 1 つ実数解を持つ．

例 6.20　方程式 $x = \cos x$ は，$\dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{\pi}{4}$ に少なくとも 1 つ実数解を持つ．

☺　関数 $f(x) = x - \cos x$ は $\dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{\pi}{4}$ で連続である[*2]．また，

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi - 3\sqrt{3}}{6} < 0, \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi - 2\sqrt{2}}{4} > 0$$

であるから，方程式 $x - \cos x = 0$ は $\dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{\pi}{4}$ の範囲に少なくとも 1 つ実数解をもつ．　□

6.3　演習問題

⋆⋆ ♢ ⋆⋆ ♣ ⋆⋆　6.1 節　⋆⋆ ♡ ⋆⋆ ♠ ⋆⋆

6.1　次の極限の収束・発散を調べよ．収束する場合はその極限値を求めよ．ただし，n は正の整数とする．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{2x^2-x-1}{x^2-1}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{x^3+3x^2-4x-12}{x^2+3x+2}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^n-1}{x-1}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x+\sin x)$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{4}{x+2}-2\right)$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to5}\sqrt{4x+5}$　(8) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{1}{(x-2)^2}$　(9) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(x-x^5)$

6.2　次の極限が存在しないことを示せ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{|x|}{x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{1}{x-3}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos^2 x}{\cos x}$

6.3　次の等式が成り立つように，実定数 a, b の値を定めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{ax+2b}{x-3}=2$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to4}\frac{a\sqrt{x}+\sqrt{b}}{x-4}=-1$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{x^2-1}=2b$

6.4　次の極限の収束・発散を調べよ．収束する場合はその極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{(0.5)^x-(0.5)^{-x}}{(0.5)^x+(0.5)^{-x}}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{\log_{10}x-\log_{10}(x+1)\right\}$　(4) $\displaystyle\lim_{x\to1+0}\left\{\log_3(x-1)-\log_3(x^2-1)\right\}$

6.5　次の極限の収束・発散を調べよ．収束する場合はその極限値を求めよ．

[*2] $y = x,\ y = \cos x$ のグラフがどちらも連続であることは明らかとしてよい．ゆえに Prop6.15 の 1) より $f(x)$ は連続であるといえる．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{3x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{5x}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2^x-1)}{4^x-1}$ (5) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}$ (6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^\circ)}{x}$

6.6 n を 3 以上の整数とし，$r>0$ とする．長さ r の辺を 2 つ持ち，頂角の大きさが $\dfrac{2\pi}{n}$ であるような二等辺三角形の面積を S_n とする．

(1) S_n を r を用いて表せ． (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nS_n$ を求めよ．

6.7 次の問に答えよ．ただし，n は正の整数とし，実数 θ は $\sin\theta\neq 0$ を満たすとする．

(1) 三角関数の積和の公式を用いて，等式

$$2\sin\theta\sum_{k=1}^{n}\sin 2k\theta=\cos\theta-\cos(2n+1)\theta$$

を示せ．

(2) 三角関数の和積の公式を用いて，等式

$$\sum_{k=1}^{n}\sin 2k\theta=\frac{\sin n\theta\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

を示せ．

(3) 極限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}$$

を求めよ．

⋆⋆ ♢ ⋆⋆ ♣ ⋆⋆ 6.2 節 ⋆⋆ ♡ ⋆⋆ ♠ ⋆⋆

6.8 次の関数 $f(x)$ が不連続な点をすべて求めよ．

(1) $f(x)=x\,[x]\quad(-2\leqq x\leqq 3)$ (2) $f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}$

6.9 次の方程式には $-1\leqq x\leqq 1$ を満たす実数解が少なくとも 1 つ存在することを示せ．

(1) $2^x=3x$ (2) $2\cos(\pi x)=2^x$

6.10 関数 $f(x)=x+2\cos\pi x$ について，次の問いに答えよ．ただし，n は自然数とする．

(1) 方程式 $f(x)=\sqrt{2}$ の解が $-1\leqq x\leqq 1$ に少なくとも 2 つ存在することを示せ．

(2) 方程式 $f(x_n)=2n+\sqrt{2}$ の解 x_n が少なくとも 1 つ存在することを示せ．

(3) (2) で求めた解 x_n に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}$ を求めよ．

7　微分法

7.1　微分の定義と性質

Def 7.1（微分法）

関数 $f(x)$ において，極限値

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

が存在するとき，$f(x)$ は $x=a$ で **微分可能** であるという．また，この極限値を $f(x)$ の $x=a$ における **微分係数** といい，$f'(a)$ で表す．$x=a$ のときの値が $f'(a)$ となるような関数を $f(x)$ の **導関数** といい

$$f'(x),\quad y',\quad \frac{dy}{dx},\quad \frac{d}{dx}f(x)$$

などと表す．導関数を求めることを **微分** するという．

Remark

- 定義式の等号は $h=x-a$ とおけば成り立つ．なお， $x-a=h\to 0$ は $x\to a$ とおきかえられる．
- 微分係数 $f'(a)$ は関数 $y=f(x)$ のグラフの $x=a$ における接線の傾きを表す（後に改めて示す）．
- 導関数の記号は，分野 (数学，物理学，工学など) や式によって用いられるものが異なる．例えば $f'(x)$ の表記では具体的な値 $f'(1)$, $f'(3)$ などが表現しやすく，$\dfrac{dy}{dx}$ の表記では文字が複数あるときに，y を x で微分することを明示できる．

Th 7.2

$f(x)$ は $x=a$ で微分可能 $\Longrightarrow$ $f(x)$ は $x=a$ で連続．

証明　$f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとすると

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

が存在する．このとき，Th 6.8 より

$$\lim_{x\to a}\bigl(f(x)-f(a)\bigr)=0 \quad \text{すなわち} \quad \lim_{x\to a}f(x)=f(a)$$

を得る．$f(x)$ は $x=a$ における極限が存在し，その値が $f(a)$ と一致するから $x=a$ で連続である．　□

Remark

- 逆は成り立たない．例えば $f(x)=|x|$ は $x=0$ で連続だが，微分不可能である．
- $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき，点 $(a,f(a))$ で $y=f(x)$ のグラフは滑らかにつながっている．

Prop 7.3

1) $\{kf(x)\}' = kf'(x)$ 　(k は定数)

2) $\{f(x) \pm g(x)\}' = f'(x) \pm g'(x)$

3) $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

4) $\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

ただし 4) においては $g(x) \neq 0$．また 4) において $f(x) = 1$ として，$\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}' = -\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$.

証明　1)，2) は微分の定義と極限の性質から判る．

3)

$$
\begin{aligned}
\{f(x)g(x)\}' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) \ - \ f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).
\end{aligned}
$$

4)

$$
\begin{aligned}
\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' &= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x)g(x+h)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x) \ - \ f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x)g(x+h)} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) - f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \cdot \frac{1}{g(x)g(x+h)} \\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}.
\end{aligned}
$$

□

Th 7.4（べき関数の導関数〈i〉）

n を非負整数とするとき

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

証明　$n = 0$ のときは微分の定義に代入すればよい．$n \geqq 1$ の場合を数学的帰納法によって示す．$n = 1$ のときに $x' = 1$ であることは微分の定義から判る． $n = k$ のとき，$(x^k)' = kx^{k-1}$ を仮定しよう．$n = k+1$ のとき

$$(x^{k+1})' = (x \cdot x^k)' = x' \cdot x^k + x \cdot (x^k)' = x^k + kx^k = (k+1)x^k$$

であるから，成立している（ただし，２つ目の等号は Prop 7.3 の 3) を用いた）．ゆえにすべての非負整数で成り立つ．　□

Remark　実は一般に，実数 α に対して $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ が成り立つ．これは後に示す．

Th 7.5（合成関数の微分法）

1)　$\{f(g(x))\}' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

2)　$y = f(t)$，$t = g(x)$ のとき $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx}$

3)　特に，$g(x) = ax + b$ であるとき $\{f(ax+b)\}' = af'(ax+b)$

証明　1) を示す．

$$
\begin{aligned}
\{f(g(x))\}' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{g(x+h) - g(x)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= \lim_{\substack{h\to 0 \\ k\to 0}} \frac{f(g(x)+k) - f(g(x))}{k} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(g(x)) \cdot g'(x).
\end{aligned}
$$

ただし，４つ目の等号では $g(x+h) - g(x) = k$ とおいた．このとき，$h \to 0$ であれば $k \to 0$ である[*13]．

2)

$$\frac{dy}{dt} = f'(t), \quad \frac{dt}{dx} = g'(x)$$

であるから，1) に代入すれば速やかに得られる．

3) 1) または 2) に代入せよ．　□

例 7.6　関数 $(x^2+1)^3$ の導関数を上の２つの方法で求める（本質的には同じである）．

1)　$\{(x^2+1)^3\}' = 3(x^2+1)^2 \cdot (x^2+1)' = 3(x^2+1)^2 \cdot 2x = 6x(x^2+1)^2$.

2)　$y = f(t) = t^3$，$t = g(x) = x^2 + 1$ とすると，$y = (x^2+1)^3 = \{g(x)\}^3 = t^3 = f(g(x))$ となり，

$$\frac{dy}{dx} = \{(x^2+1)^3\}', \quad \frac{dy}{dt} = 3t^2, \quad \frac{dt}{dx} = 2x$$

であるから

$$\{(x^2+1)^3\}' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = 3t^2 \cdot 2x = 3(x^2+1)^2 \cdot 2x = 6x(x^2+1)^2.$$

□

Th 7.7（逆関数の微分法）

$\dfrac{dx}{dy}$ が存在して 0 でないとき

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}.$$

[*13] この証明では暗黙のうちに $k \neq 0$ であることを認めているが，実際は h が 0 でなくとも k が 0 になるような関数 $g(x)$ が存在する．より厳密に証明するためには，そのような場合は別に考える必要がある．

例 7.8 $y = x^3 - x \quad \left(x > \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ の逆関数の導関数，すなわち

$$x = y^3 - y \quad \left(y > \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

を満たす関数 $y = f(x)$ の導関数を求める．上の式を y について解く（$f(x)$ を求める）ことは難しいが

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}(y^3 - y) = 3y^2 - 1$$

であるから

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{1}{3y^2 - 1}. \qquad \square$$

Remark この方法で導関数を求める場合は，$f'(x)$ の式に y があってもよい．また，値 $f'(a)$ を求める場合は，$x = a$ に対応する y を求めて代入すればよい．例えば $f'(0)$ を求めるならば，$x = 0$ として

$$0 = y^3 - y = y(y-1)(y+1).$$

y の範囲に注意すれば，この方程式を満たすのは $y = 1$ のみであるから

$$f'(0) = \frac{1}{3 \cdot 1^2 - 1} = \frac{1}{2}$$

である．

7.2 いろいろな関数の導関数

これまでに学んだいろいろな関数の導関数を考えるために，次のような定数を考える．この定数の意味は後に示す．

Def 7.9（Napier 数）

極限

$$\lim_{k \to 0}(1 + k)^{\frac{1}{k}} = \lim_{t \to \pm\infty}\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$$

は収束し，その値は $2.71828\cdots$ であることが知られている．この定数を e で表し，自然対数の底 または **Napier 数** という．とくに

$$\lim_{t \to \pm\infty}\left(1 + \frac{x}{t}\right)^t = e^x$$

が成り立つ．

Remark 数列 $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \quad (n = 1, 2, \ldots)$ はすべての自然数 n に対して

1) $a_n < a_{n+1}$

2) $2 \leqq a_n < 3$

を満たす（演習問題 5.15）．このことから a_n は 収束し，その値を α とおくと $2 \leqq \alpha \leqq 3$ が満たされることが判る．また，この数列は Napier 数 e に収束するが，Napier 数の定義をこの数列の極限で与えることもある．

導関数の定義式と極限の計算，三角関数の相互関係，底の変換，Napier 数の定義などにより，次が成り立つ．

Th 7.10 いろいろな関数の導関数

三角関数

1) $(\sin x)' = \cos x$　　2) $(\cos x)' = -\sin x$

3) $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

対数関数　（数学では，e を底とする対数 $\log_e x$ を **自然対数** といい，底 e を省略して表す[*14]．）

1) $(\log x)' = (\log|x|)' = \dfrac{1}{x}$　　2) $(\log_a x)' = (\log_a |x|)' = \dfrac{1}{x \log a}$

3) $(\log|f(x)|)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

指数関数

1) $(e^x)' = e^x$　　2) $(a^x)' = a^x \log a$

べき関数

1) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$　　（α は実数）

証明

三角関数

1) のみ示す．三角関数の加法定理を用いれば

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h} \right) \\
&= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 \\
&= \cos x.
\end{aligned}$$

ただし，極限の計算には 例 6.13 の結果および Th 6.12 を用いた．

対数関数

1)，2) を示す．$\dfrac{h}{x} = k$ とおく．$h \to 0$ のとき，$k \to 0$ である．

$$\lim_{h\to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log_a \frac{x+h}{x} = \lim_{k\to 0} \frac{1}{kx} \log_a(1+k) = \lim_{k\to 0} \frac{1}{x} \log_a (1+k)^{\frac{1}{k}}$$

が成り立つから，$a = \lim\limits_{k\to 0} (1+k)^{\frac{1}{k}}$ とおけば，導関数が $\dfrac{1}{x}$ と簡単な形になる．すなわち，先に定義を与えた

[*14] 物理学，化学では底を 10 とする常用対数，暗号理論では底を 2 とする対数など，分野ごとに主に扱う対数の底は異なる．ゆえに文献によっては底を省略した対数は必ずしも自然対数を表さない．その場合は自然対数を $\ln x$ と表記して，他の対数と区別することがある．また，関数電卓では自然対数は $\ln x$ である．

Napier 数は，**導関数を簡単に表すことができる対数関数の底の値** である．この特別な値を e と表して

$$(\log_e x)' = \frac{1}{x}, \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x}\cdot\frac{\log_e e}{\log_e a} = \frac{1}{x\log_e a}$$

を得る．対数の底 e を省略して記せば求める式そのものである．

指数関数

$$(a^x)' = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} = a^x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} = a^x\log a$$

が成り立つ．ただし最後の極限は次の Lemma 7.11 を用いた．$a=e$ とすれば $(e^x)'=e^x$ である．Napier 数 e は，**指数関数の導関数を簡潔に扱うため** にも重要であることが判る．

べき関数

指数・対数の性質より，等式 $a^{\log_a M} = M \quad (a, M>0,\ a\neq 1)$ が成り立つ．ゆえに $x>0$ のとき

$$(x^\alpha)' = (e^{\log x^\alpha})' = (e^{\alpha\log x})' = e^{\alpha\log x}\cdot(\alpha\log x)' = x^\alpha\cdot\frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

が成り立つ．α が整数でない場合は $x<0$ のときの x^α は実数として定義できないからこれで十分である．α が整数かつ $x<0$ のときは $-x=u$ とすれば $u>0$ であって，

$$\frac{d}{dx}x^\alpha = \frac{d}{dx}(-u)^\alpha = (-1)^\alpha\frac{d}{dx}u^\alpha = (-1)^\alpha\cdot\alpha u^{\alpha-1}\cdot\frac{d}{dx}u = (-1)^\alpha\cdot(-x)^{\alpha-1}\cdot(-1) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

ただし，u は x の関数であるから，u^α を x で微分するときには合成関数の微分法を用いたことに注意せよ．$x=0$ のときは α が 非負の整数のときにのみ考える必要があるが，それはすでに Th 7.4 で示している．□

Lemma 7.11

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log a}$ 2) $\displaystyle\lim_{u\to 0}\frac{a^u-1}{u} = \log a$

証明 1) は $\dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}$ と Napier 数の定義から判る．2) は $\log_a(1+x)=u$ とおくと $x\to 0$ のとき $u\to\log_a 1 = 0$ であることから，1) の結果を用いて

$$\lim_{u\to 0}\frac{a^u-1}{u} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\log_a(1+x)} = \log a.$$

□

例 7.12

- $(\log|\cos x|)' = \dfrac{(\cos x)'}{\cos x} = -\dfrac{\sin x}{\cos x} = -\tan x.$
- $(e^x\sin x)' = (e^x)'\sin x + e^x(\sin x)' = e^x\sin x + e^x\cos x = \sqrt{2}e^x\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right).$

Comp 7.13（対数微分法） 底，指数のどちらにも変数を含んだ $f(x)^{g(x)}$，あるいは $f(x)^p g(x)^q h(x)^r$ のような形の関数の微分を考える．たとえば

$$(x^{\sin x})' = x^{\sin x}\left(\cos x\log x + \frac{\sin x}{x}\right) \quad (x>0).$$

∵ $y = x^{\sin x}$ は $x > 0$ のときに正であるから，両辺に自然対数をとって

$$\log y = \log x^{\sin x} = \sin x \log x. \tag{7.14}$$

ここで，y は x の関数（$y = f(x)$）であるから，

$$(\log y)' = (\log f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{y'}{y}$$

であることに注意して，(7.14)の両辺を x について微分すると

$$\frac{y'}{y} = (\sin x)' \log x + \sin x (\log x)' = \cos x \log x + \frac{\sin x}{x}.$$

したがって

$$y' = y\left(\cos x \log x + \frac{\sin x}{x}\right) = x^{\sin x}\left(\cos x \log x + \frac{\sin x}{x}\right) \qquad \square$$

このように両辺の自然対数をとって導関数を求める方法を **対数微分法** という．

Remark $x^{\sin x}$ の導関数は，両辺の自然対数を取らずとも

$$x^{\sin x} = e^{\log x^{\sin x}} = e^{\sin x \log x} \quad (x > 0)$$

と変形すれば，e^x と $\sin x \log x$ の合成関数の微分により求めることができる．

Comp 7.14（陰関数の微分法） 方程式 $F(x, y) = 0$ の形で表される関数（陰関数）の導関数は，そのまま両辺を x について微分する．たとえば，$x^2 + y^2 = r^2$ で表される x の関数 y について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めてみる．y は x の関数（$y = f(x)$）であるから

$$\left(y^2\right)' = \left\{f(x)^2\right\}' = 2f(x) \cdot f'(x) = 2y \cdot y'$$

であることに注意して，$x^2 + y^2 = r^2$ の両辺を x について微分すると

$$2x + 2y \cdot y' = 0 \quad ゆえに \quad y' = -\frac{x}{y} \qquad \square$$

Remark 陰関数の微分では，$\dfrac{dy}{dx}$ の式から y がキレイに消去できなければ，そのまま残してよい．

Th 7.15

$x = f(t)$，$y = g(t)$ のように媒介変数（パラメタ）表示された関数の導関数について

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{f'(t)}{g'(t)}.$$

証明 y は t の関数であるが，t は x を用いて表すことができるから

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

両辺に $\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dt}}$ を掛ければ，所望の式を得る． $\square$

例 7.16　t を媒介変数として
$$x = t^2 - 2t, \quad y = t^4 - 4t \quad (t > 1)$$
と表されるとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を求める．これらの式から t を消去することは難しいが，
$$\frac{dx}{dt} = 2t - 2, \quad \frac{dy}{dt} = 4t^3 - 4$$
であるから，$t \neq 1$ に注意して
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{4t^3 - 4}{2t - 2} = \frac{4(t-1)(t^2+t+1)}{2(t-1)} = 2(t^2+t+1) \quad (t > 1).$$

Remark　この方法で導関数を求める場合は，$\dfrac{dy}{dx}$ の式に t があってもよい．$x = a$ のときの $\dfrac{dy}{dx}$ を求める場合は，$x = a$ に対応する t を求めて代入すればよい．例えば $x = 0$ のときの $\dfrac{dy}{dx}$ の値を求めるならば，$x = 0$ として
$$0 = t^2 - 2t = t(t-2) \quad \text{より} \quad t = 2 \quad (t > 1).$$
であるから
$$y = 2^4 - 4 \cdot 2 = 8, \quad \frac{dy}{dx} = 2(2^2 + 2 + 1) = 14$$
である．すなわちこの式が表すグラフは点 $(0, 8)$ を通り，この点における接線の傾きは 14 である．

Def 7.17

関数 $f(x)$ を n 回微分して得られる関数を $f(x)$ の **第 n 次導関数** といい
$$y^{(n)}, \quad f^{(n)}(x), \quad \frac{d^n}{dx^n} f(x), \quad \frac{d^n y}{dx^n}$$
などと表す．

例 7.18　$y = \sin x$ に対して
$$y' = \cos x, \quad y'' = -\sin x = -y, \quad y''' = -\cos x, \quad y^{(4)} = \sin x = y, \quad \cdots, \quad y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$
が成り立つ[*15]．

7.3　演習問題

⋆⋆ ♢ ⋆⋆ ♣ ⋆⋆　7.1 節　⋆⋆ ♡ ⋆⋆ ♠ ⋆⋆

7.1　次の関数の導関数を，定義にしたがって求めよ．

(1)　$f(x) = \sqrt{x}$　　(2)　$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$　　(3)　$f(x) = \dfrac{1}{x}$

7.2　次の関数 $f(x)$ は，$x = 0$ で微分可能でないことを示せ．

(1)　$f(x) = |x|$　　(2)　$f(x) = \sqrt{x}$　　(3)　$f(x) = [x]$

[*15] 3 次導関数程度までは $'$ を重ねて y''' のように表すことも多い．

7.3　関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき，次の極限値を $f'(a)$ を用いて表せ．

(1)　$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a+2h)}{h}$　　(2)　$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a-2h)}{h}$

7.4　次の関数を微分せよ．

(1)　$y=x^5$　(2)　$y=-x^2+x$　(3)　$y=6x^7+8x^3-2$　(4)　$y=2$

(5)　$y=\sqrt[4]{x}$　(6)　$y=x\sqrt[3]{x^2}$　(7)　$y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$　(8)　$y=\sqrt{\sqrt{x}}$

(9)　$y=\dfrac{1}{x^2}$　(10)　$y=\dfrac{x+1}{x^2}$　(11)　$y=\dfrac{x^2-3}{x^3}$　(12)　$y=\dfrac{\sqrt{x}}{x^2}$

7.5　次の関数を微分せよ．

(1)　$y=(x^2+1)(x^2-1)$　(2)　$y=(x^2+1)(x^3+1)$　(3)　$y=x(x+1)(x+2)$

(4)　$y=\dfrac{1}{x^2+1}$　(5)　$y=\dfrac{x}{x^2+1}$　(6)　$y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$

7.6　次の関数を微分せよ．

(1)　$y=(x-3)^3$　(2)　$y=(x^2+5)^4$　(3)　$y=(x+1)(x-2)^2$

(4)　$y=\dfrac{1}{(x^2+1)^3}$　(5)　$y=x\sqrt{x^2+1}$　(6)　$y=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^4$

⋆⋆ ♢ ⋆⋆ ♣ ⋆⋆　7.2 節　⋆⋆ ♡ ⋆⋆ ♠ ⋆⋆

7.7　次の極限の収束・発散を調べよ．

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$　(2)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$　(3)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$　(4)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$

7.8　次の関数を微分せよ．

(1)　$y=\tan x^3$　(2)　$y=\sin 4x$　(3)　$y=\cos^4 x$　(4)　$y=\sin x\cos x$

(5)　$y=\log 3x$　(6)　$y=\log_4(x^2+1)$　(7)　$y=x\log_2|x-3|$　(8)　$y=(\log x)^4$

(9)　$y=e^{-x^2}$　(10)　$y=9^{x+1}$　(11)　$y=xe^x$　(12)　$y=2^x\log_2 x$

(13)　$y=\sin(\cos x)$　(14)　$y=\log\left(\sqrt{\sin x}\right)$　(15)　$y=e^{\cos x}$　(16)　$y=\sin(\log x)$

(17)　$y=\dfrac{1}{\sqrt{1+e^x}}$　(18)　$y=3^{\tan x}$　(19)　$y=\log\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$　(20)　$y=\log(x+\sqrt{x^2+1})$

7.9　次の関数を微分せよ．

(1)　$y=x^x\quad(x>0)$　(2)　$y=x^{\log x}\quad(x>0)$　(3)　$y=x^{\tan x}\quad(x>0)$

(4)　$y=(\log x)^x\quad(x>1)$　(5)　$y=(x+2)^2(x+3)^3(x+4)^4$　(6)　$y=\dfrac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}$

7.10　次の方程式で定められる x の関数 y について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

(1)　$y^2 = 4x$　　(2)　$x^3 + y^3 = 1$　　(3)　$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$　　(4)　$xy^2 = 1$

7.11　x の関数 y が，t を媒介変数として次の式で表されるとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を t の関数として表せ．

(1)　$x = t^2, \quad y = t^4 + 1$　　(2)　$x = 2\sin t, \quad y = \cos 2t$

(3)　$x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t$　　(4)　$x = \pi(t - \sin t), \quad y = \pi(1 - \cos t)$

7.12　微分係数の定義から，次の極限値を求めよ．

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1}$　　(2)　$\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\sin^3 x - \sin^3 a}{x-a}$　　(3)　$\displaystyle\lim_{x\to \log a} \frac{e^x - a}{x - \log a}$　$(a > 0)$

7.13　次の関数の第 n 次導関数を求めよ．ただし a は正の定数とする．

(1)　$f(x) = \sin x$　(2)　$f(x) = \cos x$　(3)　$f(x) = \dfrac{1}{x}$　(4)　$f(x) = e^{ax}$　(5)　$f(x) = a^x$

7.14　整式 $P(x) = x^{11} - 2x^8 - x + 6$ を $x^2 - 2x + 1$ で割ったときの余りを求めよ．

7.15　関数 $x = \tan y \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ について，$\dfrac{dy}{dx}$ を x の関数として求めよ．

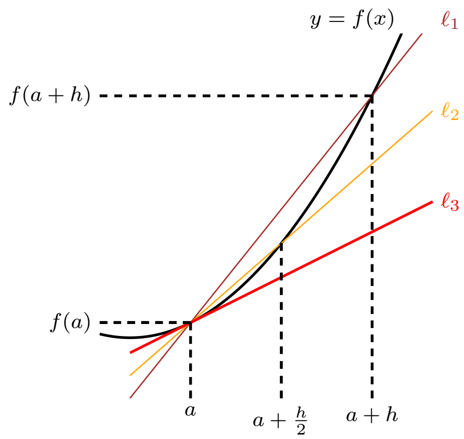
8　微分法の応用

8.1　関数のグラフと直線

$h > 0$ として，曲線 $y = f(x)$ 上の 2 点 $(a, f(a))$, $(a+h, f(a+h))$ を考える．この 2 点を通る直線の傾きは変化の割合を考えれば

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

である（直線 ℓ_1）．この h の値を 0 に近づけていけば，直線 ℓ_1 は 直線 ℓ_2，直線 ℓ_3 へと徐々に近づいていく．これが限りなく近づいていく直線を点 $(a, f(a))$ における接線であると考える．



すなわち，曲線 $y = f(x)$ の $x = a$ における **接線の傾き** は微分係数

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

で与えられる．

Def 8.1

$y = f(x)$ のグラフの $x = a$ における接線に垂直で，点 $(a, f(a))$ を通る直線を $y = f(x)$ の $x = a$ における **法線** という．

グラフの接線，法線に関しては次が成り立つ．

1)　$y = f(x)$ の $x = a$ における接線の方程式は　$y - f(a) = f'(a)(x - a)$

2)　$y = f(x)$ の $x = a$ における法線の方程式は
$$\begin{cases} y - f(a) = -\dfrac{1}{f'(a)}(x - a) & (f'(a) \neq 0) \\ x = a & (f'(a) = 0) \end{cases}$$

Remark　グラフ上にない点 (p, q) を通る接線は，接点を $(t, f(t))$ とおいて方程式をつくり，その式に通る点の座標を代入して t の値を求めればよい．

Th 8.2

2 曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が $x = a$ で共通の接線をもつとき

$$f(a) = g(a), \quad f'(a) = g'(a)$$

が成り立つ．また，このとき $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフは **接する** という．

Th 8.3（平均値の定理）

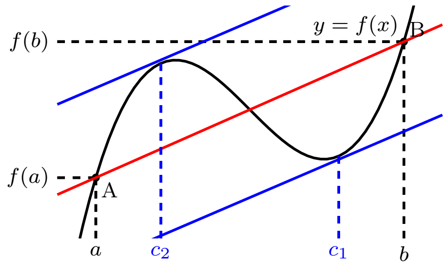
関数 $f(x)$ が $a \leqq x \leqq b$ で連続で，$a < x < b$ で微分可能ならば，次を満たす実数 c が少なくとも 1 つ存在する．

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c), \quad a < c < b.$$

証明　巻末の付録を参照．

Remark

右図は平均値の定理が主張するイメージである．関数 $f(x)$ 上の 2 点 A，B に対して， x 座標が a と b の間にあり，かつ傾きが直線 AB と等しくなるような接線が引けるグラフ上の点が必ず存在するということを主張している．なお，定理では「c が少なくとも 1 つ存在する」であるが，この図では 条件を満たす c は 2 つ存在する．



例 8.4　任意の実数 x，y に対して，次の不等式が成り立つ．

$$\left|\sin\frac{x}{2} - \sin\frac{y}{2}\right| \leqq \frac{1}{2}|x-y|$$

∵　$x < y$ とすると，$f(t) = \sin\dfrac{t}{2}$ は $x \leqq t \leqq y$ において連続かつ微分可能であるから

$$\frac{\sin\frac{x}{2} - \sin\frac{y}{2}}{x-y} = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(c) = \frac{1}{2}\cos c, \quad x < c < y$$

を満たす実数 c が存在する．c の値に関わらず $|\cos c| \leqq 1$ であるから

$$\left|\frac{\sin\frac{x}{2} - \sin\frac{y}{2}}{x-y}\right| = \left|\frac{1}{2}\cos c\right| \leqq \frac{1}{2}. \quad \text{ゆえに} \quad \left|\sin\frac{x}{2} - \sin\frac{y}{2}\right| \leqq \frac{1}{2}|x-y|.$$

$x > y$ の場合も同様に成り立つ．また，$x = y$ のときは代入すれば明らかに成り立つ．□

8.2　関数の値の変化とグラフ

関数 $y = f(x)$ のグラフの $x = a$ における接線の傾き $f'(a)$ が正であれば，その近くでは x の値が増加したときに y の値も増加する．$f'(a)$ が負であれば y の値は減少する．これらをまとめると，次が成り立つ．

1)　$a < x < b$ において常に $f'(x) > 0 \iff f(x)$ は $a \leqq x \leqq b$ で増加する．

2)　$a < x < b$ において常に $f'(x) < 0 \iff f(x)$ は $a \leqq x \leqq b$ で減少する．

3)　$a < x < b$ において常に $f'(x) = 0 \iff f(x)$ は $a \leqq x \leqq b$ で 定数値をとる（その区間では値が変化しない）．

関数 $f(x)$ は $x = a$ で連続であるとする．$f(x)$ が $x = a$ の近くで最大であるとき，$f(x)$ は $x = a$ で 極大 であるといい，$f(a)$ を 極大値 という．$f(x)$ が $x = a$ の近くで最小であるとき，$f(x)$ は $x = a$ で 極小 であ

るといい，$f(a)$ を **極小値** という．極大値と極小値を合わせて **極値** という．極値については，次が成り立つ．

Th 8.5

1) $f'(a)=0$ であり，$x=a$ で $f'(x)$ が $\begin{cases} \text{正から負に符号を変える} & \Longrightarrow \quad f(a) \text{ は極大値} \\ \text{負から正に符号を変える} & \Longrightarrow \quad f(a) \text{ は極小値} \end{cases}$

2) $f'(a)=0$ であり，$\begin{cases} f''(a)<0 & \Longrightarrow \quad f(a) \text{ は極大値} \\ f''(a)>0 & \Longrightarrow \quad f(a) \text{ は極小値} \end{cases}$

Prop 8.6

関数 $f(x)$ は $x=a$ で微分可能であるとする．このとき

$$f(x) \text{ が } x=a \text{ で極値をとる} \quad \Longrightarrow \quad f'(a)=0.$$

Remark

- Prop 7.6 の逆は成り立つとは限らない．例えば $f(x)=x^3$ は $f'(0)=0$ を満たすが，$x=0$ では極値をとらない．
- $a \leqq x \leqq b$ において連続な関数 $f(x)$ は，この範囲に必ず最大値と最小値をもつ（最大値・最小値定理）．最大値と最小値はどちらも，$a<x<b$ における極値あるいは端点 $f(a)$，$f(b)$ のいずれかである．
- 関数の値の変化を調べるときに用いる表を **増減表** という．具体例は 例 7.9 などを見よ．

Th 8.7

1) $a<x<b$ において常に $f''(x)>0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(x)$ は $a \leqq x \leqq b$ で下に凸である．

2) $a<x<b$ において常に $f''(x)<0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(x)$ は $a \leqq x \leqq b$ で上に凸である．

$f''(a)=0$ であって，$x=a$ の前後で $f''(x)$ の符号が変わるとき，点 $(a, f(a))$ を曲線 $y=f(x)$ の **変曲点** という．

参考　関数のグラフの概形をかくにあたっては，次のことに注意する．

- 対称性・周期性を調べる．
- 定義域を調べる．分数関数は (分母) $\neq 0$，無理関数は ($\sqrt{}$ の中) $\geqq 0$，対数関数は真数条件を意識する．
- $f'(x)=0$ になる値や $f'(x)$ の定義域に着目して関数の増減を調べ，増減表をつくる．
- 問題で要求されたときなど，必要に応じて $f''(x)$ を利用して関数の凹凸，変曲点，漸近線を調べる．

Comp 8.8（$y=f(x)$ のグラフの漸近線の求め方）

- $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} f(x)=a \quad \Longrightarrow \quad$ 直線 $y=a$ は漸近線．
- $\displaystyle\lim_{x \to b+0} f(x)$，$\displaystyle\lim_{x \to b-0} f(x)$ のうち少なくとも 1 つが ∞ または $-\infty \Longrightarrow$ 直線 $x=b$ は漸近線．

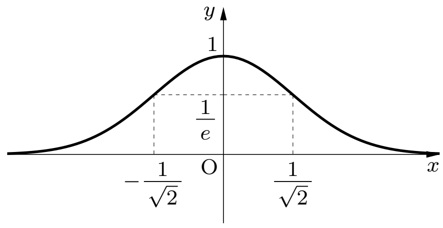
- $\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0 \quad\Longrightarrow\quad y=ax+b$ は漸近線．$x\to-\infty$ でも同様．

例 8.9

- $f(x)=e^{-x^2}$ の増減表とグラフは次のようになる．

$$f'(x)=-2xe^{-x^2},\ f''(x)=2e^{-x^2}(2x^2-1),\ \lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0.$$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
y'	$+$		$+$	0	$-$		$-$
y''	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y	↗	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↗	1	↘	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↘



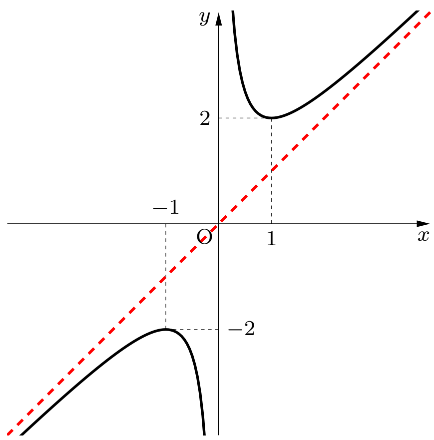
- $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ の増減表とグラフは次のようになる．

$$f'(x)=\frac{x^2-1}{x^2},\ f''(x)=\frac{2}{x^3},$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to+0}f(x)=\infty,\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-0}f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\{f(x)-x\}=0.$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y''	$-$		$-$		$+$		$+$
y	↗	-2	↘		↘	2	↗



Comp 8.10（関数の対称性）
関数 $y=f(x)$ のすべての x について

- $f(-x)=f(x)$ が成り立つとき，$f(x)$ を **偶関数** という．グラフは y 軸に線対称である．
- $f(-x)=-f(x)$ が成り立つとき，$f(x)$ を **奇関数** という．グラフは原点に点対称である．

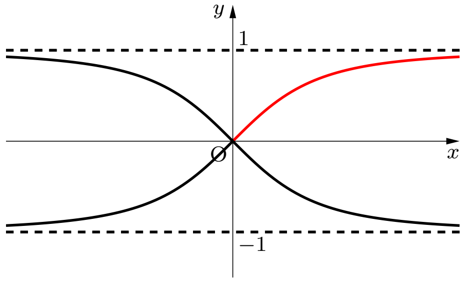
陰関数表示された関数 $F(x,y)=0$ に対しては，すべての x,y について

- $F(-x,y)=F(x,y)$ が成り立つとき，グラフは y 軸に線対称である．
- $F(x,-y)=F(x,y)$ が成り立つとき，グラフ x 軸に線対称である．

例 8.11 $x^2y^2=x^2-y^2$ のグラフは x 軸対称かつ y 軸対称である．したがってグラフは $x\geqq 0,\ y\geqq 0$ の場合についてのみ考えればかくことができる．等式を変形すると，$x,y\geqq 0$ のとき

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}},\ y' = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}},$$
$$y'' = -\frac{3x}{(x^2+1)^2\sqrt{x^2+1}},\quad \lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 1$$

であるから，グラフは右図のとおり．



例 8.12（媒介変数表示された曲線のグラフ） $x = 2\sin t,\ y = 2\sin 2t \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$ のグラフを考える．

$$\frac{dx}{dt} = 2\cos t,\quad \frac{dy}{dt} = 4\cos 2t$$

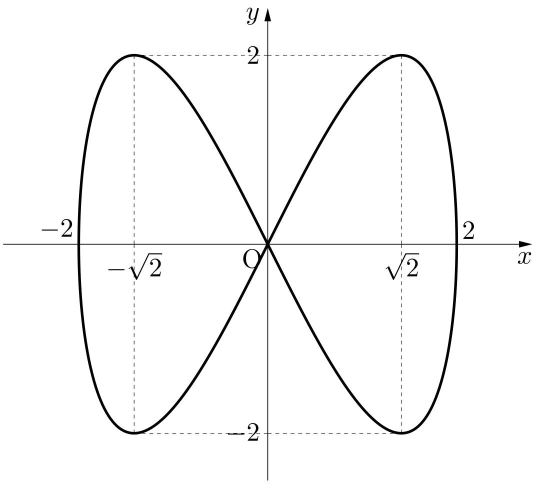
であるから

$$\frac{dx}{dt} = 0 \implies t = \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi,\qquad \frac{dy}{dt} = 0 \implies t = \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi.$$

増減表は以下のようになる．

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	$\frac{7}{4}\pi$	$\cdots$	2π
$\frac{dx}{dt}$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
x	0	$\rightarrow$	$\sqrt{2}$	$\rightarrow$	2	$\leftarrow$	$\sqrt{2}$	$\leftarrow$	$-\sqrt{2}$	$\leftarrow$	-2	$\rightarrow$	$-\sqrt{2}$	$\rightarrow$	0
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
y	0	$\uparrow$	2	$\downarrow$	0	$\downarrow$	-2	$\uparrow$	2	$\downarrow$	0	$\downarrow$	-2	$\uparrow$	0

また，$t = \pi$ で $(x, y) = (0, 0)$ であることに注意すれば，グラフは以下のとおり．



Remark $x = A\sin(at+\delta)$，$y = B\sin bt$ で表される曲線を **Lissajous 曲線** という[*16]．

Comp 8.13（微分法の不等式への応用） $f(x) > g(x)$ を証明するためには，$y = f(x) - g(x)$ の増減を調べて $y > 0$ を示せばよい．

[*16] Lissajous 曲線は単振動と関わりがあり，周波数の測定などに用いられる．

例 8.14　$x > 0$ のとき，不等式 $e^x > 1 + x$ が成り立つ．

∵　$f(x) = e^x - x - 1$ とおく．微分して増減表をかけば $x > 0$ で $f(x)$ は増加することが判る．したがって

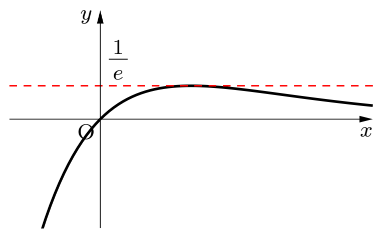
$$e^x - x - 1 = f(x) > f(0) = 0$$

が成り立つ．ゆえに $e^x > x + 1$.　□

Comp 8.15　定数 a に対して，方程式 $f(x) = a$ の実数解の個数は $y = f(x)$ と $y = a$ のグラフの交点の x 座標に一致する．

例 8.16　定数 a に対して，方程式 $x - ae^x = 0$ の実数解の個数を調べる．方程式を変形して定数を分離すると $a = \dfrac{x}{e^x}$ である．すなわち，与方程式の実数解の個数は $y = xe^{-x}$ と $y = a$ のグラフの交点の x 座標と一致する．$f(x)$ の増減表とグラフは以下のとおり．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
y'	$+$	0	$-$	
y	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0



ただし，漸近線の判定には極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = 0$ を用いた．

グラフより，実数解の個数は $\begin{cases} 0\text{ 個} & \left(a > \dfrac{1}{e}\right) \\ 1\text{ 個} & \left(a = \dfrac{1}{e}, a \leqq 0\right) \\ 2\text{ 個} & \left(0 < a < \dfrac{1}{e}\right) \end{cases}$ である．　□

8.3　その他の応用

Def 8.17（速度と加速度）

座標平面上を運動する点 $\mathrm{P}(x, y)$ の時刻 t における x 座標，y 座標が t の関数で表されるとき

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right), \quad \vec{a} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

を時刻 t における点 P の **速度**，**加速度** という．

Remark　速さ (速度の大きさ) 及び加速度の大きさはベクトルの大きさで与えられる:

$$v = \left|\vec{v}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}, \quad a = \left|\vec{a}\right| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}.$$

Prop 8.18（1 次近似）

$x = a$ の近くで

$$f(x) \fallingdotseq f(a) + f'(a)(x - a)$$

が成り立つ．これを $f(x)$ の $x = a$ の周りでの **1 次近似** という．

証明　微分係数 $f'(a)$ の定義式は極限であったが，$x=a$ の近くでほとんど等しいと考えて

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \fallingdotseq f'(a)$$

を式変形すれば示される．　$\square$

8.4　演習問題

$\star\star$ $\diamondsuit$ $\star\star$ $\clubsuit$ $\star\star$　8.1 節　$\star\star$ $\heartsuit$ $\star\star$ $\spadesuit$ $\star\star$

8.1　次の曲線 $y=f(x)$ 上の，与えられた点における接線及び法線の方程式を求めよ．

(1)　$f(x)=e^x$　$[(0,1)]$

(2)　$f(x)=\sin x$　$\left[\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$

(3)　$f(x)=\dfrac{6}{x}$　$[(3,2)]$

(4)　$f(x)=\sqrt{x+1}$　$[(0,1)]$

(5)　$f(x)=\log x$　$[(e,1)]$

(6)　$f(x)=\cos x$　$[(0,1)]$

8.2　次の方程式が表す曲線上の，与えられた点における接線及び法線の方程式を求めよ．

(1)　$x^3+y^3=4$　$[(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{2})]$　(2)　$\sqrt{x}+\sqrt{y}=3$　$[(4,1)]$　(3)　$xy^2=1$　$[(1,1)]$

8.3　次の媒介変数表示された曲線上の，与えられた t の値に対応する点における接線及び法線の方程式を求めよ．

(1)　$x=2\sin t,\ y=\cos 2t$　$\left[t=\dfrac{\pi}{3}\right]$

(2)　$x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t$　$\left[t=\dfrac{\pi}{6}\right]$

(3)　$x=\pi(t-\sin t),\ y=\pi(1-\cos t)$　$\left[t=\dfrac{\pi}{2}\right]$

8.4　次の曲線 $y=f(x)$ 上の点 A における接線の傾きは 1 である．接点 A の座標を求めよ．

(1)　$f(x)=e^{2x}-e^x$

(2)　$f(x)=\cos x-\sin x$　$(0\leqq x<2\pi)$

8.5　次の曲線 $y=f(x)$ の接線で，点 $(1,1)$ を通る接線の方程式を求めよ．

(1)　$f(x)=\log(x-1)+1$　(2)　$f(x)=\sqrt{x-2}+1$　(3)　$f(x)=e^{-x}+1$

8.6　曲線 $y=k-\cos 2x$ と $y=2\sin x$ が接するように，定数 k の値を定めよ．ただし $0\leqq x<2\pi$ とする．

8.7　$a>0$ とする．平均値の定理を用いて，次の不等式を証明せよ．

(1)　$\dfrac{1}{a+1}<\dfrac{\log(a+1)}{a}<1$

(2)　$\dfrac{1}{a+1}<\log(a+1)-\log a<\dfrac{1}{a}$

8.8　平均値の定理を用いて，次の極限を求めよ．

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^x}{x}$　(2)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$　(3)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\left\{\log(x+2)-\log x\right\}$

$\star\star\ \diamondsuit\ \star\star\clubsuit\ \star\star$　8.2 節　$\star\star\ \heartsuit\ \star\star\spadesuit\ \star\star$

8.9　次の関数の極値を求めよ．ただし (3)，(4) では範囲を $0 \leqq x \leqq 2\pi$ とする．

(1)　$y = xe^x$　　(2)　$y = \dfrac{1}{x^2-1}$　　(3)　$y = 2\sin x + \cos 2x$

(4)　$y = e^x \sin x$　　(5)　$y = |x^2 - 4x|$　　(6)　$y = x^2 + 4|x|$

8.10　次の関数が極値を持つように，a の値の範囲を定めよ．

(1)　$y = \dfrac{x^2+ax}{x+1}$　　(2)　$y = \sin x + ax$

8.11　次の関数に最大値・最小値があれば，それを求めよ．

(1)　$y = x - \sqrt{9-x^2}$　　(2)　$y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$　　(3)　$y = |x|e^x$

8.12　半径 1 の円に内接する長方形の周の長さの最大値を求めよ．

8.13　体積が $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ の正三角柱の表面積 S の最小値を求めよ．

8.14　点 $\mathrm{A}(3,0)$ と 曲線 $y = x^2$ 上の点 P に対して，線分 AP の長さの最小値を求めよ．

8.15　次の関数のグラフを描け．ただし (6) は $0 \leqq x \leqq 2\pi$ とする．

(1)　$y = \dfrac{1}{x^2+1}$　　(2)　$y = xe^x$　　(3)　$y = x + \dfrac{4}{x}$

(4)　$y = \dfrac{x^3}{x^2-4}$　　(5)　$y = x\sqrt{1-x^2}$　　(6)　$y = e^{-x}\sin x$

(7)　$y^2 = x^2(4-x^2)$　　(8)　$y^2 = x^2(x+1)$

8.16　次の媒介変数表示された曲線のグラフを描け．ただしいずれも $0 \leqq t \leqq 2\pi$ とする．

(1)　$x(t) = \cos^3 t,\quad y(t) = \sin^3 t$　　(2)　$x(t) = \pi(t - \sin t),\quad y(t) = \pi(1 - \cos t)$

8.17　$x > 0$ のとき，次の不等式を証明せよ．

(1)　$x > \sin x$　　(2)　$\cos x > 1 - \dfrac{1}{2}x^2$　　(3)　$\sin x > x - \dfrac{1}{6}x^3$

8.18　次の方程式がただ 1 つの実数解を持つことを示せ．

(1)　$x^3 + 6x - 5 = 0$　　(2)　$x = \cos x$

8.19　n を正の整数とする．$f(x) = x^{n+1}e^{-x}\quad (x \geqq 0)$ の増減を調べ，不等式 (a) が成り立つことを示せ．また，不等式 (a) を用いて極限 (b) の収束・発散を調べよ．ただし，(b) が収束する場合は，その収束値を求めよ．

(a)　$0 \leqq \dfrac{x^{n+1}}{e^x} \leqq \dfrac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}}\quad (x \geqq 0)$　　(b)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x}$

8.20　r を定数とする．曲線 $y = xe^{-x}$ の接線で，点 $\mathrm{P}(r, 0)$ を通るものがちょうど 2 つとなるような r の値の範囲を求めよ．

8.21　$f(x) = 2\sqrt{x} - \log x \quad (x \geqq 1)$，$g(x) = \dfrac{\log x}{x} \quad (x \geqq 1)$ とする．

(1)　$f(x)$ の増減を調べ，不等式 (a) が成り立つことを示せ．また，不等式 (a) を用いて極限 (b) の収束・発散を調べよ．ただし，(b) が収束する場合は，その収束値を求めよ．

(a)　$0 \leqq \log x \leqq 2\sqrt{x} \quad (x > 1)$　　　(b)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x}$

(2)　$g(x)$ の増減を調べ，$y = g(x)$ のグラフを描け．

(3)　次の値の大小を比較せよ．ただし，必要であれば $2 < e < 3 < \pi$ であることを用いてよい．

(イ)　2^e と e^2　　　(ロ)　3^π と π^3　　　(ハ)　e^π と π^e

8.22　すべての正の数 x について，不等式 $e^x \geqq ax^2$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ．

8.23　$f(x) = x^x \quad (x > 0)$ とおく．

(1)　演習問題 8.21.(1)(b) の結果を利用して $\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x = 0$ が成り立つことを示せ．

(2)　の結果を利用して，$\displaystyle\lim_{x\to+0} x^x$ の収束・発散を調べよ．ただし，収束する場合はその収束値を求めよ．

(3)　$y = f(x)$ のグラフを描け．また，方程式 $f(x) = e$ がただ 1 つの実数解を持つことを示せ．

⋆⋆ ♢ ⋆⋆ ♣ ⋆⋆　8.3 節　⋆⋆ ♡ ⋆⋆ ♠ ⋆⋆

8.24　時刻 t における点 P の座標が次のように表されるとき，時刻 t における点 P の速度，加速度をそれぞれ求めよ．ただし，v_0, g, A, ω は定数とする．

(1)　$\mathrm{P}\left(v_0 t + \dfrac{1}{2}gt^2, 0\right)$　　　(2)　$\mathrm{P}(A\sin\omega t, 0)$　　　(3)　$\mathrm{P}(t - \sin t, 1 - \cos t)$

8.25　時刻 t における座標が $(e^{-t}\sin t, e^{-t}\cos t)$ で表される点 P について，速度 $\overrightarrow{v}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ のなす角 θ を求めよ．ただし O は原点 $(0, 0)$ とする．

9 積分法

9.1 不定積分の定義と性質

$F'(x) = f(x)$ を満たす関数 $F(x)$ を $f(x)$ の **原始関数** という．このとき，定数 C を用いて $F(x)+C$ と表される関数もすべて $f(x)$ の原始関数であり[*17]，これらをまとめて $f(x)$ の **不定積分** という．$f(x)$ の不定積分を

$$\int f(x)\,dx$$

と表す．すなわち

$$F'(x) = f(x) \quad\Longleftrightarrow\quad \int f(x)\,dx = F(x) + C \quad (C\text{ は定数})$$

が成り立つ．この定数 C を **積分定数** という．**この章では C はすべて積分定数とする．**

上の定義より，関数 $f(x)$ の不定積分を求めることは，微分の逆の演算をすることと考えてよい．したがって以下の 9.1，9.2 が成り立つ．

Prop 9.1（不定積分の線形性）

a, b は定数とする．次が成り立つ．

$$\int \bigl(af(x) + bg(x)\bigr)\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx.$$

Th 9.2（初等関数の不定積分）

べき関数

1) $\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$

2) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C$

三角関数

1) $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

2) $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$

3) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$

4) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\frac{1}{\tan x} + C$

対数関数

1) $\displaystyle\int \log x\,dx = x(\log x - 1) + C$

指数関数

1) $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$

2) $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a} + C$

[*17] 平均値の定理を用いて証明できる．巻末の付録を参照せよ．

Remark

- 被積分関数が 1 であるとき，$\displaystyle\int 1\,dx = \int dx$ のように 1 を省略することがある．
- 被積分関数が分数形で分子が 1 であるとき，$\displaystyle\int \frac{dx}{x}$ のように分子に dx をかくことがある．

関数 $f(x)$ について，$x = g(t)$ であるとき，$\dfrac{dt}{dx} = g'(t)$ とすると，

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t)) \cdot \frac{dx}{dt}\,dt = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt$$

である．これを逆に考えれば，次が成り立つ．

Th 9.3（置換積分法）

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt. \quad (t = g(x))$$

上の形は置換積分法の一種である．被積分関数のある部分の微分形が別の部分に現れていれば，微分前の部分を t などで置き換える．この他にも，$\sqrt{f(x)}$ が含まれる場合は $t = \sqrt{f(x)}$ または $t = f(x)$，分数関数では分母を t で置き換えるといった方法で解決することが多い．

例 9.4 $\displaystyle\int x\sqrt{2x+1}\,dx = \frac{1}{10}(2x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{6}(2x+1)^{\frac{3}{2}} + C.$

∵

- $t = 2x+1$ とおく．$x = \dfrac{t-1}{2}$ である．また，$\dfrac{dt}{dx} = 2$ より，$dx = \dfrac{1}{2}\,dt$ であるから

$$\int x\sqrt{2x+1}\,dx = \int \frac{t-1}{2}\sqrt{t} \cdot \frac{1}{2}\,dt = \int \left(\frac{1}{4}t^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}t^{\frac{1}{2}}\right)dt = \frac{1}{10}t^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{6}t^{\frac{3}{2}} + C.$$

- $t = \sqrt{2x+1}$ とおく．$x = \dfrac{t^2-1}{2}$ であるから，$\dfrac{dx}{dt} = t$ である．ゆえに $dx = t\,dt$ で

$$\int x\sqrt{2x+1}\,dx = \int \frac{t^2-1}{2} \cdot t \cdot t\,dt = \int \left(\frac{t^4}{2} - \frac{t^2}{2}\right)dt = \frac{1}{10}t^5 - \frac{1}{6}t^3 + C.$$

いずれもはじめの t を代入しなおせば

$$\int x\sqrt{2x+1}\,dx = \frac{1}{10}(2x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{6}(2x+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

を得る．

置換積分については，次の 2 つの結果が特によく用いられる．

1) $a \neq 0$, $F'(x) = f(x)$ のとき，$\displaystyle\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$

2) $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + C$

∵ それぞれ $t = ax+b$，$t = f(x)$ と置き換えればよい． □

例 9.5

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\,dx = -\log|\cos x| + C.$$

関数の積を積分する方法は他にもある．関数の積の微分の公式において両辺の不定積分を考えれば，次の結果を得る．

Th 9.6（部分積分法）

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx.$$

Remark　部分積分法では微分したときに形が変化しにくいものを $f(x)$ とすることが多い:

指数関数（e^x, 2^x）> 三角関数（$\sin x$, $\cos x$）> べき関数（1, x, x^2）> 対数関数（$\log x$）

例 9.7

- $\displaystyle\int \log x\,dx = \int (x)'\log x\,dx = x\log x - \int x(\log x)'\,dx = x\log x - \int dx = x(\log x - 1) + C.$
- $\displaystyle\int xe^{-x}\,dx = \int (-e^{-x})'x\,dx = -xe^{-x} - \int -e^{-x}\,dx = -(x+1)e^{-x} + C.$

部分分数分解，積和の公式（Th 0.1），分子の次数下げ，分母の有理化などによって不定積分が求められる場合もある．

例 9.8

- $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2-1}\,dx = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1}\right)dx = \frac{1}{4}\log\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right| + C.$
- $\displaystyle\int \sin 5x\cos 3x\,dx = \int \frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 2x)\,dx = -\frac{1}{16}\cos 8x - \frac{1}{4}\cos 2x + C.$
- $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2-1}\,dx = \int\left(x + \frac{x}{x^2-1}\right)dx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\log|x^2-1| + C.$

9.2　定積分の定義と性質

以下，a, b は定数とする．

Def 9.9（定積分の定義）

$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とし，$f(x)$ は $a \leqq x \leqq b$ あるいは $b \leqq x \leqq a$ で連続であるとする．a から b までの $f(x)$ の **定積分** の記号と意味を

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

と定める．a を定積分の **下端**，b を **上端** という．

Remark　定積分の値は原始関数 $F(x)$ の選び方によらない:

$$\Big[F(x)+C\Big]_a^b = \big(F(b)-C\big) - \big(F(a)-C\big) = F(b)-F(a).$$

したがって，$\Big[\quad\Big]$ 内の不定積分においては積分定数 C は考えなくてよい．

定積分の定義より，次が成り立つ．

Prop 9.10（微分積分学の基本定理〈i〉）

1) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$　　2) $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$

3) $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

証明

1) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) = -\big(F(a)-F(b)\big) = -\int_b^a f(x)\,dx.$

2) $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = F(a)-F(a) = 0.$

3) $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \big(F(c)-F(a)\big) + \big(F(b)-F(c)\big) = F(b)-F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$

定積分は不定積分（原始関数）によって定められるから，次が成り立つ．

Prop 9.11（定積分の線形性）

k, ℓ は定数とする．次が成り立つ．

$$\int_a^b \big(kf(x)+\ell g(x)\big)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx + \ell\int_a^b g(x)\,dx.$$

Th 9.12（置換積分法）

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt. \quad (t=g(x))$$

Remark　不定積分のときとは異なり，t を x に戻す必要はないが，積分変数を x から t に変えたときに積分区間も換える必要がある．

例 9.13　$\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{2x+1}\,dx = \frac{6\sqrt{3}+1}{15}.$

☺

- $t = 2x + 1$ とおく．$\dfrac{dt}{dx} = 2$ で，x と t の対応は右図のとおり．したがって

x	0	$\to$	1
t	1	$\to$	3

$$\int_0^1 x\sqrt{2x+1}\,dx = \int_1^3 \left(\frac{1}{4}t^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}t^{\frac{1}{2}}\right)dt = \left[\frac{1}{10}t^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{6}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^3 = \frac{6\sqrt{3}+1}{15}.$$

- 例 9.4 より，不定積分は

$$\int x\sqrt{2x+1}\,dx = \frac{1}{10}(2x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{6}(2x+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

である．ゆえに

$$\int_0^1 x\sqrt{2x+1}\,dx = \left[\frac{1}{10}(2x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{6}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{6\sqrt{3}+1}{15}.$$

Comp 9.14（特殊な置換積分）[*18]

- $\displaystyle\int_\alpha^\beta \sqrt{a^2 - x^2}\,dx,\ \int_\alpha^\beta \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ の形の定積分は $x = a\sin\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と置きかえる．
- $\displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{dx}{a^2+x^2}$ の形の定積分は $x = a\tan\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ と置きかえる．

いずれの場合も x と θ が 1 ： 1 対応で，θ が増加する時に x も増加するような θ の範囲 である．

例 9.15 $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$

∵ $x = 2\sin\theta$ とおく．$\dfrac{dx}{d\theta} = 2\cos\theta$ であるから

x	0	$\to$	1
t	0	$\to$	$\frac{\pi}{6}$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx &= \int_0^{\pi/6} \sqrt{4(1-\sin^2 x)}\cdot 2\cos\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/6} 4\cos^2\theta\,d\theta \\ &= \int_0^{\pi/6} 4\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta = \Big[2\theta + \sin 2\theta\Big]_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

ただし，３つ目の等号は三角関数の２倍角の公式:

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 \iff \cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

を用いた． □

Th 9.16（部分積分法）

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

例 9.17 $\displaystyle\int_1^e \log x\,dx = \int_1^e (x)'\log x\,dx = \Big[x\log x\Big]_1^e - \int_1^e x(\log x)'\,dx = e - \int_1^e dx = e - \Big[\ x\ \Big]_1^e = 1.$

[*18] 高校数学ではこれらの積分は置換積分を用いて定積分のみ計算ができるが，大学の微分積分学を学べば不定積分に対応する関数（逆三角関数）を定義して扱うことになる．

Prop 9.18（微分積分学の基本定理〈ii〉）

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

証明　$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数の 1 つとする．$F(a)$ が定数であることに注意すれば，定積分の定義より

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = \frac{d}{dx}\big(F(x)-F(a)\big) = \frac{d}{dx}F(x) - \frac{d}{dx}F(a) = f(x). \qquad \square$$

例 9.19　$f(x) = \displaystyle\int_0^x (t-x)e^{t^2}\,dt$ に対して $f''(x) = -e^{x^2}$.

∵

$$f(x) = \int_0^x (t-x)e^{t^2}\,dt = \int_0^x te^{t^2}\,dt - x\int_0^x e^{t^2}\,dt$$

であるから，積の微分に注意して

$$f'(x) = xe^{x^2} - \left(\int_0^x e^{t^2}\,dt + xe^{x^2}\right) = -\int_0^x e^{t^2}\,dt, \quad f''(x) = -\frac{d}{dx}\int_0^x e^{t^2}\,dt = -e^{x^2}. \qquad \square$$

以下の 3 つの定理は定積分と曲線に囲まれた領域の面積との関係から導くと理解し易いと思われる．現行の指導要領に合わせて 9 章の内容として紹介するが，いずれも証明は 10 章で扱うことにする．

Th 9.20

1)　$f(x)$ が偶関数　$\Longrightarrow$　$\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$

2)　$f(x)$ が奇関数　$\Longrightarrow$　$\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0.$

例 9.21　$\displaystyle\int_{-2}^2 (x^5+x^4)\,dx = \int_{-2}^2 x^5\,dx + \int_{-2}^2 x^4\,dx = 0 + 2\int_0^2 x^4\,dx = \left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^2 = \frac{64}{5}.$

次の **区分求積法** は，定積分と面積の関係上非常に重要な考え方である[*19]．

[*19] 現行の指導要領では（本テキストでも同様に）「積分は微分の逆演算」であると定義しているが，本来の歴史の流れでは微分と積分は独立に発展している．面積は区分求積法によって求められるものであり，それを記号

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

で表していたが，後に微分積分学の基本定理が示されて微分と積分の関係が明らかになり，区分求積法の複雑な計算を経由せずに，微分を用いて面積を容易に計算することが可能となったのである．

Th 9.22（区分求積法）

$\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$，$x_k = a + k\Delta x$ に対して次が成り立つ;

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx.$$

とくに，$a=0,\ b=1$ として以下が成り立つ;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

また，上式はどちらも左辺の和を $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}$ としても成り立つ．

例 9.23 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4}{n^5} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4 = \int_0^1 x^4\,dx = \frac{1}{5}.$

Th 9.24

関数 $f(x)$，$g(x)$ が $a \leqq x \leqq b$ で連続かつ $0 \leqq f(x) \leqq g(x)$ であるとき

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b g(x)\,dx$$

が成り立つ．等号成立は，$a \leqq x \leqq b$ でつねに $f(x) = g(x)$ のとき．

例 9.25 $\displaystyle\log 2 < \int_0^1 \frac{dx}{1+x^4} < 1.$

∵ $0 \leqq x \leqq 1$ において $1 \leqq 1 + x^4 \leqq 1 + x$ であるから

$$0 \leqq \frac{1}{1+x} \leqq \frac{1}{1+x^4} \leqq 1$$

が成り立つ．したがって

$$\log 2 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \leqq \int_0^1 \frac{dx}{1+x^4} \leqq \int_0^1 dx = 1.$$

ここで，$0 \leqq x \leqq 1$ において

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x^4} \quad \text{および} \quad \frac{1}{1+x^4} = 1$$

はつねには成り立たないから，等号は成立しない．したがって

$$\log 2 < \int_0^1 \frac{dx}{1+x^4} < 1.$$ □

9.3 演習問題

⋆⋆ ♢ ⋆⋆♣ ⋆⋆ 9.1 節 ⋆⋆♡ ⋆⋆♠ ⋆⋆

9.1　次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \sqrt[4]{x^5}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int (1+\tan^2 x)\,dx$

(3) $\displaystyle\int 4^{x+2}\,dx$　　(4) $\displaystyle\int 2^x e^x\,dx$

9.2　次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int (x+3)^8\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \sqrt{4t+1}\,dt$　　(3) $\displaystyle\int \sin(2\theta+\pi)\,d\theta$

(4) $\displaystyle\int x(x+2)^3\,dx$　　(5) $\displaystyle\int t\sqrt{t-3}\,dt$　　(6) $\displaystyle\int (e^x+3)^5 e^x\,dx$

(7) $\displaystyle\int (\sin^2 x+\cos^2 x)\,dx$　　(8) $\displaystyle\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx$　　(9) $\displaystyle\int \frac{1}{y\log y}\,dy$

(10) $\displaystyle\int \sin x\cos^4 x\,dx$　　(11) $\displaystyle\int x^2 e^{x^3}\,dx$　　(12) $\displaystyle\int (2y+1)e^{(y-1)(y+2)}\,dy$

9.3　次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int x\sin x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \log(x+3)\,dx$　　(3) $\displaystyle\int \log(x^2-1)\,dx$

(4) $\displaystyle\int xe^{-x}\,dx$　　(5) $\displaystyle\int \log x^x\,dx$　　(6) $\displaystyle\int \frac{2x}{\cos^2 x}\,dx$

(7) $\displaystyle\int (\log x)^2\,dx$　　(8) $\displaystyle\int x^2 e^x\,dx$　　(9) $\displaystyle\int e^{-x}\cos x\,dx$

9.4　次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x-1}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^2+1}\,dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-4}\,dx$　　(4) $\displaystyle\int \frac{x-8}{6(x^2-x-2)}\,dx$

9.5　次の不定積分を求めよ．ただし，(1),(2) は (　) 内の置換を用いよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,dx\quad (t=\sin x)$　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+e^{-x}+2}\,dx\quad (t=e^x)$

(3) $\displaystyle\int \sin 4x\sin 6x\,dx$　　(4) $\displaystyle\int \cos 2x\cos 4x\,dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\,dx$　　(6) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3x+4}-2}\,dx$

9.6　次の 2 つの条件を同時に満たす関数 $F(x)$ を求めよ．

(1)　$F'(x)=(x+1)e^x,\quad F(0)=3$

(2)　$F'(x)=x\log x,\quad F(1)=1$

9.7　以下の問いに答えよ．

(1) 等式 $\dfrac{1}{\sin x\cos x}=\tan x+\dfrac{1}{\tan x}$ が成り立つことを示し，不定積分 $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x\cos x}$ を求めよ．

(2) (1) の結果及び 2 倍角の公式を利用して，不定積分 $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x}$ を求めよ．

(3) (2) の結果及び三角関数の合成を利用して，不定積分 $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x+\cos x}$ を求めよ．

$\star\star$ $\diamondsuit$ $\star\star$ $\clubsuit$ $\star\star$ 9.2 節 $\star\star$ $\heartsuit$ $\star\star$ $\spadesuit$ $\star\star$

9.8 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{1}{x}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_4^9\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ (3) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta$

(4) $\displaystyle\int_1^e\left(\frac{x+1}{x}\right)dx$ (5) $\displaystyle\int_1^2\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ (6) $\displaystyle\int_1^2\frac{dt}{t(t-4)}$

9.9 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1(3x+1)^4\,dx$ (2) $\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{dx}{x\log x}$ (3) $\displaystyle\int_0^1 t^2e^{t^3}\,dt$

(4) $\displaystyle\int_0^3\sqrt{9-x^2}\,dx$ (5) $\displaystyle\int_2^{2\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$ (6) $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^3\frac{dt}{t^2+9}$

9.10 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+2)\cos x\,dx$ (2) $\displaystyle\int_1^2 x^4\log x\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}xe^{2x}\,dx$ (4) $\displaystyle\int_1^2 x(x-2)^4\,dx$

9.11 次の等式を満たす関数 $f(x)$ 及び定数 a の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt=e^x+2x+a$ (2) $\displaystyle\int_\pi^x f(t)\,dt=a\sin^2 x+\frac{a}{2}x^2-1$

9.12 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ．

(1) $\displaystyle f(x)=\sin^2 x+\int_0^\pi f(t)\,dt$ (2) $\displaystyle f(x)=x+\int_0^1 f(t)e^t\,dt$

9.13 次の関数 $F(x)$ に対して，$F'(x)$ を求めよ．

(1) $\displaystyle F(x)=\int_0^x(x+t)e^t\,dt$ (2) $\displaystyle F(x)=\int_0^x(x-t)\cos^2 t\,dt$

9.14 m,n を自然数とする．次の定積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx$ (2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx\,dx$

(3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx$

9.15　次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^3(x^2+1)^2\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-e}^{e} x^3 e^{x^2}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_{-100}^{100} (e^x - e^{-x})^{10}\,dx$　　(4) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\,dx$

9.16　次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2} + \frac{1}{\left(1+\frac{3}{n}\right)^2} + \cdots + \frac{1}{\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}\right\}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left\{(\sqrt{1}+\sqrt{n})^2 + (\sqrt{2}+\sqrt{n})^2 + (\sqrt{3}+\sqrt{n})^2 + \cdots + (\sqrt{n}+\sqrt{n})^2\right\}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+n^2}$

9.17　数列 $\{a_n\}$　$(n = 1, 2, \ldots)$ を

$$a_n = \lim_{h\to\infty} \int_0^h t^n e^{-t}\,dt$$

で定める．以下の問に答えよ．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^n e^{-x} = 0$ は用いてよい．

(1)　a_1 を求めよ．

(2)　$a_{n+1} = (n+1)a_n$ を示せ．

(3)　数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ．

9.18　$a_n = \dfrac{(2n)!}{n!}$　$(n = 1, 2, \ldots)$ に対して，次の問いに答えよ．

(1)　等式

$$\sum_{k=1}^{n} \log \frac{n+k}{n} = \log a_n - n \log n$$

が成り立つことを示せ．

(2)　極限　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log a_n - n\log n}{n}$　を求めよ．

(3)　極限　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{a_n}}{n}$　を求めよ．

9.19　どのような実数 t に対しても $\displaystyle\int_a^b \{f(x) + tg(x)\}^2\,dx \geqq 0$ が成り立つことを用いて，Cauchy-schwarz の不等式

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leqq \left(\int_a^b f(x)^2\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)^2\,dx\right)$$

を証明せよ．

9.20　数列 $\{a_n\}$　$(n = 0, 1, \ldots)$ を

$$a_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{x^2+1}\,dx$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1) a_0 を求めよ．また，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を示せ．

(2) $a_{n+1} + a_n$ を n の式で表せ．

(3) Gregory-Leibniz 級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

の値を求めよ．

9.21 数列 $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ を

$$a_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x \, dx$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1) a_1 を求めよ．また，$a_{n+2} + a_n$ を n の式で表せ．

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を示せ．

(3) Mercator 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

の値を求めよ[*20]．

9.22 数列 $\{a_n\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ を

$$a_n = \int_0^{\pi/4} \sin^{2n} x \tan x \, dx$$

で定めるとき，以下の問いに答えよ．

(1) a_0 を求めよ．また，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を示せ．

(2) $a_{n+1} - a_n$ を n の式で表せ．

(3) 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$$

の値を求めよ．

9.23 数列 $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ を

$$a_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 x^n e^{-x} \, dx$$

で定めるとき，以下の問いに答えよ．ただし，$0! = 1$ であるとする．

(1) a_1 を求めよ．また，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を示せ．

(2) $a_{n+1} - a_n$ を n の式で表せ．

[*20] $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \left(a_{2n-1} + a_{2n+1}\right)$ を計算せよ．

(3)　級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

の値を求めよ．

9.24　数列 $\{I_m\} \quad (m = 0, 1, \ldots)$ を Wallis 積分

$$I_m = \int_0^{\pi/2} \sin^m x \, dx$$

とする．以下の問いに答えよ．

(1)　I_0, I_1 を求めよ．

(2)　漸化式

$$I_{m+2} = \frac{m+1}{m+2} I_m$$

を示せ．

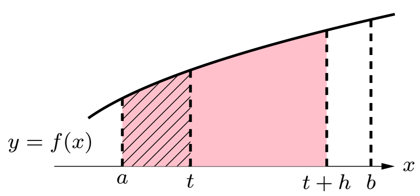
(3)　I_5, I_6 の値をそれぞれ求めよ．

9.25　正の整数 n に対して，数列 $\{x_k\} \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$ を $x_k = \sin \dfrac{k}{n}\pi$ で定める．n 個のデータ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の分散を V_n とするとき，$\lim_{n \to \infty} V_n$ を求めよ．

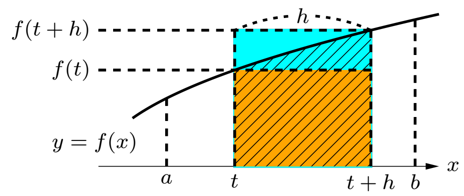
10　積分法の応用

10.1　面積

以下では，直線または曲線であるような図形はすべて 曲線 と表すこととする．連続な非負関数 $f(x)$ に対して，$y=f(x)$ のグラフと x 軸，2 直線 $x=a$, $x=b$ によって囲まれた領域の面積 S を考えよう．$y=f(x)$ のグラフと x 軸，2 直線 $x=a$, $x=t$ によって囲まれた領域の面積を $S(t)$ とおくと，最終的に求めたい面積は $S=S(b)$ である．



斜線領域: $S(t)$，桃色領域: $S(t+h)$



斜線領域: $S(t+h)-S(t)$，水色領域: $hf(t+h)$，橙色領域; $hf(t)$

$h>0$ とする．左の図は $S(t)$ 及び $S(t+h)$ が面積を表す領域を示している．右の図はそれらの差 $S(t+h)-S(h)$ が面積を表す領域（斜線）と，高さ $f(t)$，底辺の長さ h の長方形（橙色），高さ $f(t+h)$，底辺の長さ h の長方形（水色）を示している． 右の図より不等式

$$hf(t) < S(t+h)-S(h) < hf(t+h)$$

が成り立つことが判るが，全辺を $1/h$ 倍して

$$f(t) < \frac{S(t+h)-S(t)}{h} < f(t+h)$$

である．$h\to+0$ の極限をとれば，微分係数の定義とはさみうちの原理より

$$S'(t) = \lim_{h\to+0}\frac{S(t+h)-S(t)}{h} = f(t)$$

を得るから，$f(t)$ の原始関数の 1 つを $F(t)$ とすると $S(t)=F(t)+C$ とできる．ところで，$S(t)$ の定め方より $S(a)=0$ であるから

$$0=S(a)=F(a)+C$$

より $C=-F(a)$ を得る．したがって $S(t)=F(x)-F(a)$ であって，求める面積 $S=S(b)$ は

$$S=S(b)=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx$$

を満たす．$f(x)$ が単調減少な場合も同様の結果を得る．$f(x)<0$ のときは長方形の高さが $-f(t)$, $-f(t+h)$ となって

$$S=S(b)=F(a)-F(b)=-\int_a^b f(x)\,dx$$

を得る．x 軸より下側に $f(x)$ があるときの定積分は，負の符号つきで面積を与えるということである．$f(x)$ が連続であれば 単調増加な部分と単調減少な部分に分けられるから，連続な関数のグラフが作る領域の面積

はこれで求められることが判る[*21]．ここで，前章の定理の証明をしておく．

Th 9.20 の証明:

1) $f(x)$ が偶関数であれば，そのグラフは y 軸に対称である．したがって，$-a \leqq x \leqq 0$ において $y=f(x)$ のグラフと x 軸がつくる面積は，$0 \leqq x \leqq a$ におけるそれと等しい:

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

よって

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

2) $f(x)$ が奇関数であれば，そのグラフは原点に対称である，したがって，$-a \leqq x \leqq 0$ において $y=f(x)$ のグラフと x 軸がつくる面積は，$0 \leqq x \leqq a$ におけるそれと等しい．ただし，$y=f(x)$ のグラフ と x 軸との位置関係が原点で変わるから符号が逆になり

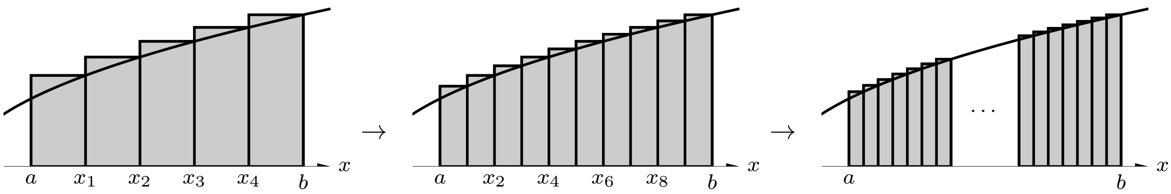
$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

よって

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0. \qquad \square$$

Th 9.22 の証明:

$\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$，$x_k = a + k\Delta x \quad (k=0,1,\ldots,n)$ とおく．$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ は区間 $a \leqq x \leqq b$ を n 等分する点である．$a \leqq x \leqq b$ で連続な非負関数 $f(x)$ に対して，$y=f(x)$ のグラフと x 軸，2 直線 $x=a$，$x=b$ によって囲まれた領域の面積を S とする．また，$x_k - x_{k-1} = \Delta x$ であることに注意する．



5 等分するとき　　10 等分するとき　　n 等分するとき

図より，分割を増やすごとに灰色領域の面積は S に近づいていくことが判る．3 つ目の図のように n 等分するときの灰色領域の面積は

$$f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\cdot\Delta x + \cdots + f(x_n)\cdot\Delta x = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

n が大きくなるほど S に近づいていくのだから，S を定積分の記号で表せば

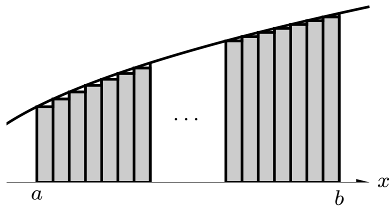
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

[*21] より正確な表現としては，長方形の広さを表す値「面積」 を 縦辺長 × 横辺長 で定めるとき，定積分を用いれば 曲線によって囲まれた領域に対しても「面積」が定義できる．つまり，一般の図形の面積は定積分で定義するということである．

また，長方形の縦辺長を左側に合わせれば

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\varDelta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

を得る．



n 等分するとき

$f(x)$ が負の値をとる場合についても，ほとんど同様にして示される． □

Th 9.24 の証明:

$0 \leqq f(x) \leqq g(x)$ であるから，$y = f(x)$ のグラフと直線 $x = a$, $x = b$, x 軸 が囲む領域の面積は，$y = g(x)$ のグラフのそれより小さい．したがって不等式は成り立つ．等号成立は $a \leqq x \leqq b$ でつねに $f(x) = g(x)$ となるときしかない． □

２つの曲線に囲まれている領域の面積に対しては，それぞれの面積を求めて和（差）をとれば，次が成り立つことが判る．

Th 10.1（グラフで囲まれた領域の面積〈i〉）

２つの曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 及び２つの直線 $x = a$, $x = b$ によって囲まれた領域の面積 S は，$f(x) \geqq g(x)$ であれば

$$S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx.$$

Remark

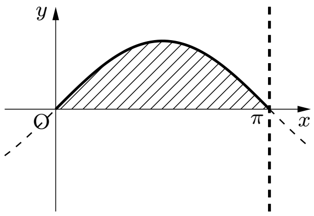
- x 軸を直線 $y = 0$ と考えれば，座標軸に囲まれた領域の面積に対しても成り立っていることが判る．
- 領域が複数に分かれる場合は，それぞれ個別に考える．

例 10.2　曲線 $y = \sin x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$ と x 軸で囲まれた領域の面積 S を求める．$0 \leqq x \leqq \pi$ において $\sin x \geqq 0$ である．また，$y = \sin x$ と x 軸の交点は $x = 0$, $x = \pi$ であるから，２直線 $x = 0$, $x = \pi$ で囲まれていると考えて

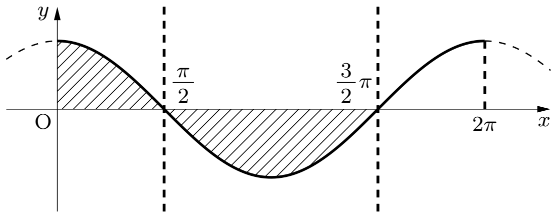
$$S = \int_0^{\pi} (\sin x - 0)\,dx = \int_0^{\pi} \sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2.$$

例 10.3　曲線 $y = \cos x \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$ と x 軸，y 軸で囲まれた領域の面積 S を求める．$0 \leqq x \leqq \pi/2$ においては $\cos x \geqq 0$ であるが，$\pi/2 \leqq x \leqq 3\pi/2$ では $\cos x \leqq 0$ であり，$3\pi/2 \leqq x \leqq 2\pi$ では 囲まれた領域はない．$y = \cos x$ と x 軸との交点は $x = \pi/2,\ 3\pi/2$ であるから，２直線 $x = 0$（y 軸），$x = \pi/2$ で囲まれた領域と $x = \pi/2$，$x = 3\pi/2$ で囲まれた領域とに分けて考えて

$$S = \int_0^{\pi/2} (\cos x - 0)\,dx + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (0 - \cos x)\,dx = \Big[\sin x\Big]_0^{\pi/2} + \Big[-\sin x\Big]_{\pi/2}^{3\pi/2} = 1 + 2 = 3.$$



例 10.2 の参考図



例 10.3 の参考図

例から判るように，曲線の位置関係を正確に知ることが重要である．必要に応じてグラフを描く，共有点を求めるなどの作業を行うこと．

x 軸を基準にした面積の考え方と同様にして，y 軸を基準にした面積も定積分で表すことができる．

Th 10.4（グラフで囲まれた領域の面積 〈ii〉）

2 つの曲線 $x = f(y)$, $x = g(y)$ 及び 2 つの直線 $y = c$, $y = d$ によって囲まれた領域の面積 S は，$f(y) \geqq g(y)$ であれば

$$S = \int_c^d \bigl(f(y) - g(y)\bigr)\,dy.$$

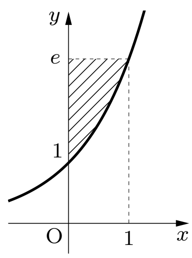
例 10.5

曲線 $x = \log y$ と y 軸，直線 $y = e$ によって囲まれた領域の面積 S は

$$S = \int_1^e \log y\,dy = 1.$$

あるいは，$x = \log y$ を $y = e^x$ と表すことができることに注意すれば，長方形の面積と $y = e^x$ および直線 $x = 1$，x 軸，y 軸によって囲まれた領域との面積の差をとって

$$S = e \times 1 - \int_0^1 e^x\,dx = e - (e - 1) = 1.$$



例 10.5 の参考図

Remark　陰関数表示された曲線の面積を求めるときは，対称性を利用する．

例 10.6（円の面積）　$r > 0$ とする．$F(x, y) = x^2 + y^2 - r^2$ に対して $F(x, y) = 0$ は原点を中心とした半径 r の円を表す．また，$F(-x, y) = F(x, y)$, $F(x, -y) = F(x, y)$ を満たすから，x 軸，y 軸それぞれに対称な図形であることが確認できる．したがって x, $y \geqq 0$ を満たす領域だけ考えれば十分である．すなわち，$y = \sqrt{r^2 - x^2}$ 及び x 軸，y 軸に囲まれた領域の面積を 4 倍すればよい．ゆえに

$$S = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \pi r^2.\quad (x = r\sin\theta \text{ と置き換えて積分した．})$$

Remark　逆に，$\displaystyle\int_a^b \sqrt{r^2 - x^2}\,dx \quad (-r \leqq a < b \leqq r)$ の形の定積分は円の面積から図形的に考察することができる．

例 10.7

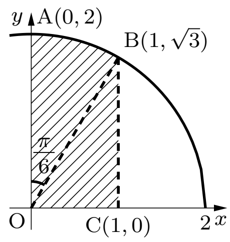
$$\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

☺

この定積分は右図の斜線領域の面積を表す．直角三角形 OBC は辺の比が $1:2:\sqrt{3}$ であるから，$\angle\mathrm{BOC} = \pi/3$，おうぎ形 OAB の中心角は $\pi/6$ である．したがって面積は

$$(\text{おうぎ形 OAB}) + (\text{直角三角形 OBC}) = \frac{1}{2}\cdot 2^2 \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

なお，置換積分法を用いた計算の方法は例 9.15 を確認せよ． □



例 10.7 の参考図

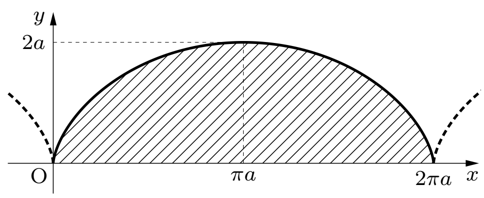
Comp 10.8　媒介変数表示された曲線と x 軸に囲まれた領域の面積は，置換積分で求める．

例 10.9　cycloid: $x(t) = a(t - \sin t),\ y(t) = a(1-\cos t)\quad (0 \leqq t \leqq 2\pi,\ a > 0)$ と x 軸に囲まれた領域の面積 S は

$$dx = \frac{dx}{dt}\,dt, \quad \frac{dx}{dt} = a(1-\cos t), \quad \begin{array}{c||ccc} x & 0 & \to & 2\pi a \\ \hline t & 0 & \to & 2\pi \end{array}$$

に注意すれば

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi a} y(t)\,dx = \int_0^{2\pi} y(t)\,\frac{dx}{dt}\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)\,dt \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\,dt \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\right)\,dt = 3\pi a^2. \end{aligned}$$



例 10.9 の参考図

10.2　体積

Th 10.10（回転体の体積）

曲線 $y = f(x)$，x 軸及び直線 $x = a$，$x = b$ によって囲まれた領域を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V は

$$V = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2\,dx$$

証明　回転体を軸に垂直な平面で切ると断面は円になる．区間 $a \leqq x \leqq b$ を区分求積法と同じように分割し，長方形の代わりに高さが Δx である円柱を考えると，各円柱の底面積は $\pi\{f(x_1)\}^2, \pi\{f(x_2)\}^2, \ldots, \pi\{f(x_n)\}^2$ となる．分割が増えれば円柱の体積の和は V に近づくから

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \pi\{f(x_k)\}^2 \Delta x = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2\,dx$$

を得る．2 つ目の等号は Th 9.22 による． □

例 10.11（球の体積）　原点を中心とした半径 $r\ (>0)$ の球は，曲線 $y=\sqrt{r^2-x^2}$（半円）を x 軸の周りに 1 回転させて得られる立体であるから，その体積 V は

$$V=\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx=2\pi\int_{0}^{r}(r^2-x^2)\,dx=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

ただし，2 つ目の等号では Th 9.24 を用いた．　□

Remark　x を y に変えれば y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めることができる．

10.3　曲線の長さ

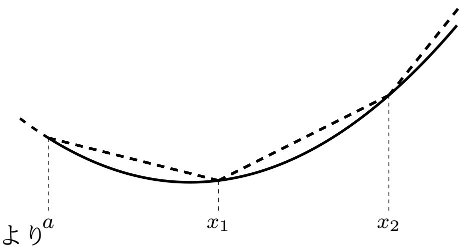
Th 10.12（曲線の長さ ⟨i⟩）

曲線 $y=f(x)\quad(a\leqq x\leqq b)$ の長さ L は

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

証明　区分求積法と同様の分割に対して，$y=f(x)$ のグラフ上の $x=x_k$ を満たす点を A_k とする．点 A_0，A_1，$\cdots$，A_n までを結んだ折れ線の長さは，分割を増やせば曲線の長さに近づいていく．点 $(x_k,f(x_k))$ と 点 $(x_{k-1},f(x_{k-1}))$ の距離 d_k は

$$\begin{aligned}d_k&=\sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+(f(x_k)-f(x_{k-1}))^2}\\&=\sqrt{(\Delta x)^2+(f(x_k-\Delta x)-f(x_k))^2}\\&=\Delta x\sqrt{1+\left(\frac{f(x_k-\Delta x)-f(x_k)}{\Delta x}\right)^2}\end{aligned}$$



であり，$n\to\infty$ のとき $\Delta x\to 0$ になることと，微分の定義より

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_k-\Delta x)-f(x_k)}{\Delta x}=f'(x_k)$$

であることを用いて，求める曲線の長さ L は

$$L=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}d_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\{f'(x_k)\}^2}\Delta x=\int_a^b\sqrt{1+\{f(x)\}^2}\,dx$$

である[*22]．ただし，最後の等号は Th 9.22 を用いた．

例 10.13　放物線 $y=x^2\quad(0\leqq x\leqq 1)$ の長さ L は

$$L=\int_0^1\sqrt{1+(2x)^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+4x^2}\,dx=\frac{2\sqrt{5}+\log(2+\sqrt{5})}{4}$$

である．ただし，この定積分の計算は難儀である．章末の演習問題を参照せよ．　□

[*22] 2 つ目の等号では $\sqrt{\ }$ の中の極限だけを先に計算しているが，これは一般には成り立たない．結果が正しいことは知られているため，この式変形では厳密さより理解のしやすさを優先した．

Th 10.14（曲線の長さ〈ii〉）

媒介変数表示された曲線 $x = f(t),\ y = g(t)\quad (\alpha \leqq t \leqq \beta)$ の長さ L は

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}\,dt$$

証明　$f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ と表せば

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,\frac{dx}{dt}\,dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt. \qquad \square$$

例 10.15　例 10.9 の cycloid の長さ L は

$$\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t), \quad \frac{dy}{dt} = a \sin t$$

に注意すれば

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}\,dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)}\,dt = a\int_0^{2\pi} 2\sin\frac{t}{2}\,dt = 8a.$$

ただし，３つ目の等号では半角の公式

$$1 - \cos t = 2\sin^2\frac{t}{2}$$

および $0 \leqq t \leqq 2\pi$ において $\sin\dfrac{t}{2} \geqq 0$ であることを用いた． $\square$

Remark　座標平面上を動く点 $\mathrm{P}(x, y)$ に対して $x = f(t),\ y = g(t)$ であるとき，P の速度を $\overrightarrow{v}$ とすると，$t = \alpha$ から $t = \beta$ までに点 P が動く道のり ℓ は

$$\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}\,dt = \int_\alpha^\beta |\overrightarrow{v}|\,dt$$

を満たす．これは速さと時間の関係を表す $v - t$ グラフにおいて，グラフの面積（=積分）が道のりと一致することを示している．

10.4　演習問題

$\star\star$ ♢ $\star\star$ ♣ $\star\star$　10.1 節　$\star\star$ ♡ $\star\star$ ♠ $\star\star$

10.1　次の不等式を示せ:

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^2} \leqq 2 - \frac{1}{N}.$$

10.2　次の曲線によって囲まれた領域を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

(1)　$x^2 + (y - R)^2 = r^2 \quad (0 < r < R)$

10.3　連立不等式

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x-3 \leqq 0 \\ x^2+y^2+6x-3 \leqq 0 \end{cases}$$

が表す領域を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

10.4　2 つの曲線 $y=\sin x,\ y=\cos x \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$ によって囲まれた領域を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ．

10.5　次の曲線の長さ L を求めよ．

(1)　$y=x\sqrt{x} \quad (0 \leqq x \leqq 4)$

(2)　$y=\log(\cos x) \quad \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{6}\right)$

(3)　$x=e^t\cos t,\ y=e^t\sin t \quad (0 \leqq t \leqq 1)$

(4)　$x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t \quad (0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2})$

10.6　$a,\ b>0$ とする．楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の周の長さを L とする．定積分に対する Cauchy - Schwarz の不等式（演習 9.19）を用いて，次の不等式を示せ:

$$L \leqq \pi\sqrt{2(a^2+b^2)}.$$

10.7　曲線 $y=x^2$ において，点 $(0,0)$ から点 $(1,1)$ までの長さを L とする．e を自然対数の底として次の問いに答えよ．

(1)　u を実数とする．不等式 $u<\sqrt{1+u^2}$ が成り立つことを示せ．

(2)　$u=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$ とおく．この式を t について解け．また，$\dfrac{du}{dt}$ を t の式で表せ．

(3)　等式 $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{1+u^2}\,du$ を用いて長さ L の値を求めよ．

11　付録

Th 5.6 の証明:

背理法で示す．$\alpha > \beta$ と仮定する．主張の条件より

$$\lim_{n\to\infty}|a_n-\alpha|=0,\quad \lim_{n\to\infty}|b_n-\beta|=0$$

が成り立つ．いま，$(\alpha-\beta)/2>0$ であるから，n が十分大きいならば

$$|a_n-\alpha|<\frac{\alpha-\beta}{2},\quad |b_n-\beta|<\frac{\alpha-\beta}{2}$$

が同時に成り立つことがある．このとき

$$-\frac{\alpha-\beta}{2}<a_n-\alpha \quad \text{より} \quad \frac{\alpha+\beta}{2}<a_n,$$

$$b_n-\beta<\frac{\alpha-\beta}{2} \quad \text{より} \quad b_n<\frac{\alpha+\beta}{2}$$

が成り立つ．したがって

$$b_n<\frac{\alpha+\beta}{2}<a_n$$

であるが，これは矛盾である．したがって $\alpha \leqq \beta$.

※これら論法は結局，「数直線上で a_n と α の距離が n を大きくすれば近づいていく」という事実に基づいて「それっぽく」組み立てたものにすぎない．なぜなら，数列の極限の本当の定義は 5 章で与えたような曖昧なものではなく，この事実を数式で表現したもの（ε - N 論法）であり，曖昧な表現のままでは，これ以上証明を厳密にすることはできないのである．

n 個の要素に対する AM-GM 不等式の証明:

AM-GM 不等式は次の不等式である; $p_1,p_2,\ldots,p_n \geqq 0$ に対して

$$\frac{p_1+p_2+\cdots+p_n}{n} \geqq \sqrt[n]{p_1p_2\cdots p_n} \tag{11.15}$$

この不等式の証明は数多く知られているが,「通常の帰納法」を用いた 1 つを紹介する． 1 つでも $p_i=0$ となるような i があるならば明らかである．よってすべての p_i が 0 でない場合を示す．証明方法は多く知られているが，ここでは微分を使わない方法での証明を載せることにする．直接不等式 (11.15) を示すのではなく，まずは数学的帰納法を用いて，$q_1,q_2,\ldots,q_n>0$ に対して

$$q_1q_2\cdots q_n=1 \quad \Longrightarrow \quad q_1+q_2+\cdots+q_n \geqq n \tag{11.16}$$

を示す．$n=2$ の ときは $q_1q_2=1$ ゆえ $q_2=\dfrac{1}{q_1}$ であるから

$$q_1+q_2-2=\frac{q_1^2+1-2q_1}{q_1}=\frac{(q_1-1)^2}{q_1} \geqq 0$$

であるから成立している．等号成立条件は $q_1=q_2=1$ である．$n=k$ のとき

$$q_1q_2\cdots q_k=1 \quad \Longrightarrow \quad q_1+q_2+\cdots+q_k \geqq k$$

を仮定し，$n=k+1$ のときを考える．$k+1$ 個の正の数 $q_1, q_2, \cdots, q_k, q_{k+1}$ を並べ替えて，q_k を最大のもの，q_{k+1} を最小のものとする．最大または最小のものが複数あるときは，そのうちの 1 つとする．$k+1$ 個の数の積が 1 であるから，$q_k \geqq 1$，$q_{k+1} \leqq 1$ であって

$$(q_k - 1)(1 - q_{k+1}) \geqq 0$$

が成り立つことに注意せよ．$q_k q_{k+1} = r_k$ とおけば，$r_k > 0$ であり，示す命題は

$$q_1 q_2 \cdots q_{k-1} r_k = 1 \quad \Longrightarrow \quad q_1 + q_2 + \cdots + q_{k-1} + q_k + q_{k+1} \geqq k+1$$

となるが，$n=k$ のときの仮定から

$$q_1 + q_2 + \cdots + q_{k-1} + r_k \geqq k$$

が成り立つことに注意すれば

$$q_1 + q_2 + \cdots + q_{k-1} + q_k + q_{k+1} \geqq k - r_k + q_k + q_{k+1} = k + 1 + (q_k - 1)(1 - q_{k+1}) \geqq k+1$$

を得る．等号成立は $(q_k - 1)(1 - q_{k+1}) = 0$ すなわち $q_k = 1$ または $q_{k+1} = 1$ のときであるが，$q_k = 1$ ならば $q_1 q_2 \cdots q_n = 1$ と q_k の最大性より $k+1$ 個の数はすべて 1 となる．$q_{k+1} = 1$ のときもその最小性から同様の結論を得る．したがって $q_1 = q_2 = \cdots = q_k = q_{k+1}$ のときに等号成立．以上の考察より，2 以上の自然数で不等式 (11.16) は成り立つ．さて

$$q_k = \frac{p_k}{\sqrt[n]{p_1 p_2 \cdots p_n}}$$

とおけば，$q_1 q_2 \cdots q_n = 1$ が満たされている．よって (11.16) より

$$\frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}{\sqrt[n]{p_1 p_2 \cdots p_n}} = \frac{p_1}{\sqrt[n]{p_1 p_2 \cdots p_n}} + \frac{p_2}{\sqrt[n]{p_1 p_2 \cdots p_n}} + \cdots + \frac{p_n}{\sqrt[n]{p_1 p_2 \cdots p_n}} = q_1 + q_2 + \cdots + q_n \geqq n$$

が成り立つから，両辺を $\dfrac{\sqrt[n]{p_1 p_2 \cdots p_n}}{n}$ 倍すれば (11.15) を得る．等号成立条件は $p_1 = p_2 = \cdots = p_n$ である． □

Th 7.3 の証明:

次の定理は認めるものとする．また，以下では $a < b$ とする．

Th 11.1（最大値・最小値の定理）

関数 $f(x)$ が $a \leqq x \leqq b$ 上で連続であれば，$f(x)$ は最大値と最小値をもつ．

Lemma 11.2（Rolle の定理）

関数 $f(x)$ は 3 つの条件

1) $a \leqq x \leqq b$ で連続　　2) $a < x < b$ で微分可能　　3) $f(a) = f(b)$

を満たすとする．このとき，$f'(c) = 0$ かつ $a < c < b$ なる実数 c が少なくとも 1 つ存在する．

証明　(a)　$f(t) > f(a)$ なる t があるとする．Th 11.1 より $a < c < b$ かつ $f(c)$ が $f(x)$ の最大値となるような c が存在する．$f(c)$ は最大値であるから $a < c + h < b$ を満たす 0 でない実数 h に対して $f(c) \geqq f(c+h)$ を満たす．さらに，$f(x)$ は微分可能であるから

$$f'(c) = \lim_{h \to +0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leqq 0, \quad f'(c) = \lim_{h \to -0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geqq 0$$

が成り立つ．ゆえにこの c は $f'(c) = 0$ を満たす．

(b) $f(t) < f(a)$ なる t があるときは (a) と同様にして $f'(c) = 0$ を満たす c の存在を示せる．

(c) (a)，(b) のどちらでもないとき，$f(x)$ は定数関数である．すなわち，$a < c < b$ なるすべての c に対して $f'(c) = 0$ である．

以上より題意は示された． □

⋆ Th 7.3 の証明:

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x$$

を考えれば，$g(a) = g(b)$ が成り立つ．ゆえに $g(x)$ は Lemma **??**.2 の条件を満たす．したがって，$g'(c) = 0$ かつ $a < c < b$ なる c が存在する．すなわちこの c は

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

を満たす．これは定理の主張にほかならない． □

不定積分についての証明:

$a < x < b$ で連続な関数 $f(x)$ の不定積分の 1 つが $F(x)$ であるとき，$f(x)$ の不定積分はすべて定数 C を用いて $F(x) + C$ の形で表されることを示す．$F(x)$ と異なる原始関数 $G(x)$ に対して，関数 $H(x)$ を

$$H(x) = G(x) - F(x)$$

とおく．$a < x < b$ においてはつねに $H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ が成り立つことに注意せよ．平均値の定理より，$a < s < x < t < b$ なる s, t に対し

$$\frac{H(t) - H(s)}{t - s} = H'(u) \quad s < u < t$$

を満たす u が存在するが，$H'(u) = 0$ であった．ゆえに $H(t) = H(s)$ であるが，s, t は $a < s < t < b$ を満たせばどのような数でも良いから，結局 $a < x < b$ を満たすどのような x に対しても $H(x)$ は一定の値をとる．この値を C とおけば，$H(x) = C$ より $G(x) = F(x) + C$ を得る． □

演習問題　略解とヒント

〈1 章〉

偏角は度数法または弧度法，どちらで解答してもよい．解答例では設問に応じて使いやすい方を用いている．

1.1　$a,\ b,\ c,\ d$ を実数として，$z=a+bi,\ w=c+di$ とおく．

1)　$\overline{z+w}=\overline{(a+c)+(b+d)i}=(a+c)-(b+d)i=(a-bi)+(c-di)=\overline{a+bi}+\overline{c+di}=\overline{z}+\overline{w}.$

2)　$\overline{z-w}=\overline{(a-c)+(b-d)i}=(a-c)-(b-d)i=(a-bi)-(c-di)=\overline{a+bi}-\overline{c+di}=\overline{z}-\overline{w}.$

3)　(左辺) $=\overline{zw}=\overline{(a+bi)(c+di)}=\overline{(ac-bd)+(ad+bc)i}=(ac-bd)-(ad+bc)i,$

(右辺) $=\overline{z}\cdot\overline{w}=(a-bi)(c-di)=(ac-bd)-(ad+bc)i.$

ゆえに右辺と左辺が等しいから，等式は成り立つ．

4)　$\dfrac{1}{w}=\alpha$ とおく．$w\alpha=1$ より $\overline{w\alpha}=\overline{1}=1$ であるから，$\overline{\alpha}=\dfrac{1}{\overline{w}}$ が成り立つ．3) より

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\overline{\left(z\cdot\frac{1}{w}\right)}=\overline{z\alpha}=\overline{z}\cdot\overline{\alpha}=\overline{z}\cdot\frac{1}{\overline{w}}=\frac{\overline{z}}{\overline{w}}.$$

5)　数学的帰納法で示す．$n=1$ のときは明らかである．$n=k$ のとき，$\overline{z^k}=\overline{z}^k$ が成立すると仮定すると，3) より

$$\overline{z^{k+1}}=\overline{z^k\cdot z}=\overline{z^k}\cdot\overline{z}=\overline{z}^k\cdot\overline{z}=\overline{z}^{k+1}.$$

1.2　(1)　$z=x+yi$（x,y は実数）とおくと

$$\frac{z+\overline{z}}{2}=\frac{(x+yi)+(x-yi)}{2}=x$$

であるから，これは実数である．

(2)　z を (1) と同様に定めると

$$\frac{z-\overline{z}}{2i}=\frac{(x+yi)-(x-yi)}{2i}=y$$

であるから，これは実数である．

(3)　$w=z^2+(\overline{z})^2$ とおく．

$$\overline{w}=\overline{z^2+(\overline{z})^2}=\overline{z^2}+\overline{(\overline{z})^2}=\overline{z^2}+z^2=w$$

であるから，Th 1.2 より，これは実数である．

(4)　$w=z^2-(\overline{z})^2$ とおく．

$$\overline{w}=\overline{z^2-(\overline{z})^2}=\overline{z^2}-\overline{(\overline{z})^2}=\overline{z^2}-z^2=-w$$

であるから，$w\neq 0$ に注意すれば，Th 1.2 より，これは純虚数である．

1.3　$z=x+yi$（x,y は実数）とおくと

$$z+\frac{1}{z}=x+iy+\frac{1}{x+iy}=x+iy+\frac{x-iy}{x^2+y^2}=x+\frac{x}{x^2+y^2}+\left(y-\frac{y}{x^2+y^2}\right)i$$

である．この値が実数になるためには虚部が 0 であればよいから

$$y - \frac{y}{x^2+y^2} = y\left(1 - \frac{1}{x^2+y^2}\right) = 0.$$

ゆえに $y=0$ または $x^2+y^2=1$．ここで，$z \neq 0$ より $y=0$ のときは $x \neq 0$ である．したがって，$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ であることに注意すれば，z の満たすべき条件は，「z が 0 でない実数であるか，または $|z|=1$ を満たすこと」である．

【別解】 $w = z + \dfrac{1}{z}$ とおく．w が実数であるためには $w = \overline{w}$ が成り立てばよい．

$$z + \frac{1}{z} = w = \overline{w} = \overline{\left(z + \frac{1}{z}\right)} = \overline{z} + \frac{1}{\overline{z}}$$

より，

$$(z - \overline{z}) + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\overline{z}}\right) = 0.$$

ここで，$z\overline{z} = |z|^2$ に注意すれば，左辺は

$$(z - \overline{z}) + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\overline{z}}\right) = (z - \overline{z}) + \frac{\overline{z} - z}{z\overline{z}} = (z - \overline{z})\left(1 - \frac{1}{|z|^2}\right)$$

となる．この式の値が 0 になればよいから，$z - \overline{z} = 0$ または $|z|^2 = 1$ である．したがって「z が 0 でない実数であるか，または $|z|=1$ を満たすこと」が条件である．

1.4 (1) $|\alpha| = 2, \quad \arg\alpha = 30°.$ (2) $|\beta| = 2, \quad \arg\beta = 90°.$
(3) $|\gamma| = 3, \quad \arg\gamma = 180°.$ (4) $|\delta| = \sqrt{2}, \quad \arg\delta = 225°.$

1.5 (a) $n=0$ のときは

$$1 = (\cos\theta + i\sin\theta)^0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$$

より成り立つ．$n=1$ のときは明らかに成り立つ．$n=k$ のとき

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^k = \cos k\theta + i\sin k\theta$$

が成り立つと仮定する．$n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned}
(\cos\theta + i\sin\theta)^{k+1} &= (\cos\theta + i\sin\theta)^k \cdot (\cos\theta + i\sin\theta) \\
&= (\cos k\theta + i\sin k\theta) \cdot (\cos\theta + i\sin\theta) \\
&= \cos k\theta\cos\theta + i\sin\theta\cos k\theta + i\sin k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta \\
&= (\cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta) + i(\sin k\theta\cos\theta + \cos k\theta\sin\theta) \\
&= \cos(k\theta + \theta) + i\sin(k\theta + \theta) \\
&= \cos(k+1)\theta + i\sin(k+1)\theta
\end{aligned}$$

であるから，このときも等式は成立する．ただし，5 つ目の等号には三角関数の加法定理を用いた．したがって，$n = 0, 1, 2, \ldots$ に対してこの等式は成り立つ．

(b) n を負の整数とする．$m=-n$ とおけば m は正の整数であるから，

$$\begin{aligned}(\cos\theta+i\sin\theta)^n=(\cos\theta+i\sin\theta)^{-m}&=\frac{1}{(\cos\theta+i\sin\theta)^m}=\frac{1}{\cos m\theta+i\sin m\theta}\\&=\frac{1}{\cos m\theta+i\sin m\theta}\cdot\frac{\cos m\theta-i\sin m\theta}{\cos m\theta-i\sin m\theta}=\cos m\theta-i\sin m\theta\\&=\cos(-m)\theta+i\sin(-m)\theta=\cos n\theta+i\sin n\theta\end{aligned}$$

であるから成り立つ．ただし，６つ目の等号では三角関数の性質

$$\cos(-\theta)=\cos\theta,\ \sin(-\theta)=-\sin\theta$$

を用いた．

1.6 $|\alpha|=2,\quad |\beta|=\sqrt{2},\quad \arg\alpha=120^\circ,\quad \arg\beta=45^\circ$ である．

(1) $|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|=2\sqrt{2},\quad \arg(\alpha\beta)=\arg\alpha+\arg\beta=120^\circ+45^\circ=165^\circ.$

(2) $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}=\sqrt{2},\quad \arg\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)=\arg\alpha-\arg\beta=120^\circ-45^\circ=75^\circ.$

1.7 (1) $\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{(\sqrt{2}-\sqrt{6})+i(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{1+\sqrt{3}i}=\sqrt{2}+\sqrt{2}i.$

(2) $\arg\alpha=60^\circ$，$\arg\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)=45^\circ$ と計算できるから，$\arg\beta=\arg\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)-\arg\alpha=45^\circ-60^\circ=-15^\circ$．範囲を合わせれば，求める偏角は $-15^\circ+360^\circ=345^\circ$[*23]．

1.8 (1) $1+i=\sqrt{2}(\cos\pi/4+i\sin\pi/4)$ である．de Moivre の定理より

$$(1+i)^8=(\sqrt{2})^8\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^8=2^4(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=2^4=16.$$

(2) $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}=\dfrac{\sqrt{2}(\cos\pi/4+i\sin\pi/4)}{2(\cos\pi/6+i\sin\pi/6)}$ である．de Moivre の定理より

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^{12}=\frac{(\sqrt{2})^{12}(\cos\pi/4+i\sin\pi/4)^{12}}{2^{12}(\cos\pi/6+i\sin\pi/6)^{12}}=\frac{2^6(\cos 3\pi+i\sin 3\pi)}{2^{12}(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)}=\frac{-1}{2^6}=-\frac{1}{64}.$$

(3) $\dfrac{-4+i}{5+3i}=\dfrac{-17+17i}{34}=\dfrac{1}{2}(1+i)=\cos\pi/4+i\sin\pi/4$ である．de Moivre の定理より，-1.

1.9 (1) z は 1 の 8 乗根であるから，$z=\cos\dfrac{2k\pi}{8}+i\sin\dfrac{2k\pi}{8}$ $(k=0,1,2,\ldots,7)$ である．したがって，

$$z=1,\quad \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i,\quad i,\quad -\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i,\quad -1,\quad -\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i,\quad -i,\quad \frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i.$$

(2) $z=1$ は（代入しても成り立たないから）この方程式の解ではない．ゆえに等比数列の和の公式より

$$0=z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=\frac{1-z^6}{1-z}$$

[*23] この結果から $\sin 15^\circ$ 及び $\cos 15^\circ$ の値を計算することができる．

である．ゆえに $z^6=1$ であるが，これは 1 の 6 乗根を表すから，$z=\cos\dfrac{2k\pi}{6}+i\sin\dfrac{2k\pi}{6}$ $(k=0,1,2,3,4,5)$ である．したがって，1 の 6 乗根のうち 5 つ（解は $z=1$ を除く）で，

$$z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad -1,\quad -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

(3) $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおく．de Movire の定理より

$$r^4(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)=-2+2\sqrt{3}i.$$

が成り立つ．この式から $|-2+2\sqrt{3}|=4$ が判るので，$r^4=4$．$r>0$ より $r=\sqrt{2}$ であり，

$$\cos 4\theta=-\frac{1}{2},\quad \sin 4\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

を得る．これを満たすのは $4\theta=2\pi/3+2n\pi$ のときであるから，$0\leqq\theta<2\pi$ に注意して

$$\theta=\frac{\pi}{6}+\frac{n\pi}{2}\quad (n=0,1,2,3).$$

となる．したがって，$r=\sqrt{2}$ とともに $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ に代入して，

$$z=\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,\quad -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i,\quad -\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i,\quad \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i.$$

1.10 (1) de Moivre の定理より，

$$z^{14}=\left(\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}\right)^{14}=\left(\cos\frac{14\pi}{7}+i\sin\frac{14\pi}{7}\right)=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1+i\cdot 0=1.$$

(2) $z\neq 1$ に注意すると，等比数列の和の公式と $z^{14}=1$ より，

$$1+z+z^2+\cdots+z^{13}=\sum_{k=1}^{14}z^{k-1}=\frac{z^{14}-1}{z-1}=\frac{1-1}{z-1}=0.$$

(3) $2016=14\times 144$ であるから，$z^{2017}=z^{2016}\cdot z=(z^{14})^{140}\cdot z=1^{140}\cdot z=z$ となる．したがって，

$$1+z+z^2+\cdots+z^{2016}=\sum_{k=1}^{2017}z^{k-1}=\frac{z^{2017}-1}{z-1}=\frac{z-1}{z-1}=1.$$

1.11 残りの頂点 z_2, z_3 は z_1 を原点中心に 120°, -120° だけ回転させれば得られるから

$$z_2=z_1(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)=2i\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\sqrt{3}-i,$$

$$z_3=z_1(\cos(-120^\circ)+i\sin(-120^\circ))=2i\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{3}-i.$$

1.12 (1) $|z|=|z-i|$ が成り立つ．両辺を 2 乗すると

$$z\overline{z}=|z|^2=|z-i|^2=(z-i)\overline{(z-i)}=(z-i)(\overline{z}+i)=z\overline{z}+i(z-\overline{z})+1$$

が成り立つから，

$$z-\overline{z}=\frac{-1}{i}=\frac{-1}{i}\cdot\frac{i}{i}=\frac{-i}{-1}=i.$$

(2)　(1) より $i = z - \overline{z}$ である．両辺を 2 乗すると

$$-1 = i^2 = (z - \overline{z})^2 = z^2 - 2z\overline{z} + \overline{z}^2 = z^2 - 2|z|^2 + \overline{z}^2 = -2 + z^2 + \overline{z}^2$$

が成り立つから，$z^2 + \overline{z}^2 = 1$ である．ここで，$1 = |z|^2 = z\overline{z}$ より，$\overline{z} = \dfrac{1}{z}$ が成り立つから，求める値は 1．

(3)　$t = |z - ai|$ とおく．$z\overline{z} = |z|^2 = 1$ と $z - \overline{z} = i$ に注意して，

$$t^2 = (z - ai)\overline{(z - ai)} = (z - ai)(\overline{z} + ai) = z\overline{z} + ai(z - \overline{z}) + a^2 = 1 - a + a^2 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

であるから，$a = \dfrac{1}{2}$ のとき，最小値 $\dfrac{3}{4}$ をとる．

※実は題意を満たすような z は 2 つのみである．具体的に z の値を求めて解いてもよい．

〈5 章〉

5.1 (1)　∞　　(2)　$\dfrac{4}{3}$　　(3)　∞　　(4)　0

(5)　$\dfrac{1}{2}$　　(6)　0　　(7)　1　　(8)　$\dfrac{1}{2}$

5.2 (1)　2　　(2)　0

5.3 (1)　$P_n = \dfrac{1}{10}\left(-\dfrac{1}{5}\right)^{n-1} + \dfrac{1}{2}$　　(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a}{10}\left(-\frac{a}{5}\right)^{n-1} = \begin{cases} 0 & (-5 < a < 5) \\ -1/2 & (a = -5) \end{cases}$

5.4　(1)　$a_1 = \dfrac{3}{2}$,　$a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} + \dfrac{1}{a_n}$

(2)　はじめに $\sqrt{2} \leqq a_n$ を数学的帰納法により示す．$a_1 \geqq \sqrt{2}$ は明らかである．$a_k \geqq \sqrt{2}$ を仮定すると，相加平均と相乗平均の大小関係より

$$a_{k+1} = \frac{a_k}{2} + \frac{1}{a_k} \geqq 2\sqrt{\frac{a_k}{2} \cdot \frac{1}{a_k}} = \sqrt{2}$$

が成り立つ．したがって，すべての自然数 n に対して $\sqrt{2} \leqq a_n$ が成り立つ．
これを利用すると

$$a_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} - \sqrt{2} \leqq \frac{a_n}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(a_n - \sqrt{2}\right).$$

(3)　$\sqrt{2}$　　（まず (2) の不等式を繰り返し用いて，$\left|a_n - \sqrt{2}\right| \leqq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\left|a_1 - \sqrt{2}\right|$ を示す．）

5.5 (1)　$\dfrac{14}{5}$　　(2)　$\dfrac{13}{5}$　　(3)　1

(4)　$-\dfrac{2}{5}$　　(5)　発散する．　　(6)　発散する．

5.6 (1)　2　　　(2)　3

5.7　(1)　$-1 < x < 1$ のとき $\dfrac{x^3}{1-x^3}$ に収束.

(2)　$-\sqrt{2} < x < 0,\ 0 < x < \sqrt{2}$ のとき $\dfrac{1}{2-x^2}$ に収束.

(3)　$x > 0$ のとき $\dfrac{2^x}{1-2^x}$ に収束.

5.8　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{3}.$

5.9　$\dfrac{1+e}{1-e}h$ メートル.

5.10　$\left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{2}{5}\right)$

5.11 (1)　$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$　　(2)　$r_n = \left(3-2\sqrt{2}\right)^{n-1}$　　(3)　$\dfrac{4+3\sqrt{2}}{8}\pi$

5.12　2

5.13　(1)

$$0 \leqq \sum_{n=1}^{\infty}(x_n + ty_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(x_n^2 + 2tx_ny_n + t^2y_n^2) = t^2\sum_{n=1}^{\infty}y_n^2 + 2t\sum_{n=1}^{\infty}x_ny_n + \sum_{n=1}^{\infty}x_n^2$$

であるから

$$a = \sum_{n=1}^{\infty}y_n^2, \quad b = \sum_{n=1}^{\infty}x_ny_n, \quad c = \sum_{n=1}^{\infty}x_n^2$$

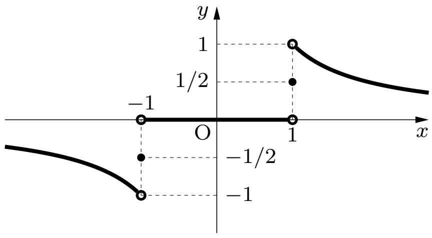
とおいて，t についての 2 次式 $y = at^2 + 2bt + c \quad (a, c \geqq 0)$ がどのような t に対しても $y \geqq 0$ となるような条件を調べる．$a = 0$ のときはすべての n に対して $x_n = 0$ となるから，$0 \leqq 0$ となって示す不等式は成立していることが判る． $a \neq 0$ のとき，$y = ax^2 + 2bx + c$ は下に凸な放物線であるから，放物線が x 軸に接するか，または x 軸より上側にあれば条件 $y \geqq 0$ を満たす．したがって判別式 $D \leqq 0$ を考えればよい;

$$0 \geqq D/4 = b^2 - ac \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty}x_ny_n\right)^2 = b^2 \leqq ac = \left(\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}y_n^2\right).$$

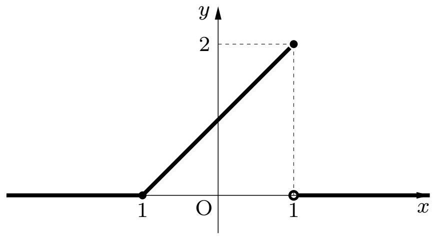
(2)　$x_n = 1/\sqrt{n(n+1)},\ y_n = 1/2^n$ に対して Cauchy-schwarz の不等式を適用せよ.

5.14

(1)



(2)



5.15 (1) 与えられた不等式を用いると

$$1+\frac{1}{n+1}=\frac{n+2}{n+1}=\frac{1+n\cdot\dfrac{n+1}{n}}{n+1}\geqq\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

が成り立つ．両辺を $(n+1)$ 乗して

$$a_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\geqq\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=a_n.$$

(2)

$$\begin{aligned}
a_n&=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+{}_n\mathrm{C}_1\frac{1}{n}+{}_n\mathrm{C}_2\frac{1}{n^2}+{}_n\mathrm{C}_3\frac{1}{n^3}+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\frac{1}{n^n}\\
&=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\\
&\leqq 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\\
&\leqq 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\\
&=3.
\end{aligned}$$

(1) の結果と併せて

$$2=a_1\leqq a_n\leqq 3.$$

〈6 章〉

6.1 (1) $\dfrac{3}{2}$ (2) 4 (3) n (4) 0 (5) ∞

(6) -1 (7) 5 (8) ∞ (9) ∞

6.2 (1)

$$\frac{|x|}{x}\longrightarrow\begin{cases}1 & (x\to+0)\\ -1 & (x\to-0)\end{cases}$$

であるから，右側極限と左側極限が一致しない．したがってこの極限は存在しない．

(2)

$$\frac{1}{x-3}\longrightarrow\begin{cases}+\infty & (x\to3+0)\\ -\infty & (x\to3-0)\end{cases}$$

であるから，右側極限と左側極限が一致しない．したがってこの極限は存在しない．

(3)

$$\frac{1-\cos^2 x}{\cos x} = \frac{\sin^2 x}{\cos x} = \sin x \tan x \longrightarrow \begin{cases} -\infty & (x \to \frac{\pi}{2}+0) \\ +\infty & (x \to \frac{\pi}{2}-0) \end{cases}$$

であるから，右側極限と左側極限が一致しない．したがってこの極限は存在しない．

6.3 (1) $a=2,\ b=-3$　(2) $a=-4,\ b=64$　(3) $a=-\dfrac{6}{5},\ b=\dfrac{1}{5}$

6.4 (1) 1　(2) 1　(3) 0　(4) $-\log_3 2$

6.5 (1) $\dfrac{2}{3}$　(2) $\dfrac{1}{5}$　(3) 2　(4) $\dfrac{1}{2}$　(5) -1　(6) $\dfrac{\pi}{180}$

6.6 (1) $S_n = \dfrac{1}{2}r^2 \sin\dfrac{2\pi}{n} = r^2 \sin\dfrac{\pi}{n}\cos\dfrac{\pi}{n}$　(2) πr^2

6.7 (1) 積和の公式より $2\sin 2k\theta \sin\theta = \cos(2k-1)\theta - \cos(2k+1)\theta$ が成り立つ．ゆえに

$$2\sin\theta \sum_{k=1}^{n} \sin 2k\theta = \sum_{k=1}^{n}\left\{\cos(2k-1)\theta - \cos(2k+1)\theta\right\} = \cos\theta - \cos(2n+1)\theta.$$

(2) 和積の公式より

$$\cos\theta - \cos(2n+1)\theta = 2\sin(n+1)\theta \sin n\theta$$

が成り立つ．$\sin\theta \neq 0$ に注意すれば，(1) の等式から示す式を得る．

(3) $\dfrac{2}{\pi}$

6.8 (1) $x=-1,\ 1,\ 2,\ 3$　(2) $x=1$

6.9 (1) $f(x) = 2^x - 3x$ とおく．$f(x)$ は $-1 \leqq x \leqq 1$ において連続である．また，$f(-1) = \dfrac{7}{2} > 0,\ f(1) = -1 < 0$ であるから，中間値の定理より，$f(c)=0,\ -1<c<1$ を満たすような実数 c が存在する．この c は題意を満たす．

(2) $f(x) = 2\cos(\pi x) - 2^x$ とおく．$f(x)$ は $0 \leqq x \leqq 1$ において連続である．また，$f(0) = 1 > 0,\ f(1) = -4 < 0$ であるから，中間値の定理より，$f(c)=0,\ 0<c<1$ を満たすような実数 c が存在する．この c は題意を満たす．

6.10 (1) $g(x) = f(x) - \sqrt{2}$ とおく．$f(x)$ が連続であるから $g(x)$ も連続で，

$$g(-1) = -3-\sqrt{2} < 0,\quad g(0) = 2-\sqrt{2} > 0,\quad (1) = -1-\sqrt{2} < 0$$

であるから，中間値の定理より $g(x)=0$ は $-1 \leqq x \leqq 0,\ 0 \leqq x \leqq 1$ にそれぞれ少なくとも 1 つの解をもつ．

(2) $h(x) = f(x) - 2n - \sqrt{2}$ とおく．$f(x)$ が連続であるから $h(x)$ も連続で，

$$h(2n) = f(2n) - 2n - \sqrt{2} = 2-\sqrt{2} > 0,\quad h(2n+1) = f(2n+1) - 2n - \sqrt{2} = -1-\sqrt{2} < 0$$

であるから，中間値の定理より，$h(x)$ は $2n \leqq x \leqq 2n+1$ に少なくとも 1 つ実数解をもつ．

(3) $n \to \infty$ の極限を調べるから $n \geqq 2$ として考えてよい．(2) の解 x_n の存在範囲より

$$2n \leqq x_n \leqq 2n+1 \quad \text{であるから} \quad 2 \leqq \frac{x_n}{n} \leqq 2 + \frac{1}{n}$$

が成り立つ．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ であるから，はさみうちの原理より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = 2$.

〈7 章〉

7.1 (1)

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

(2)

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{x+h}} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{h\sqrt{x(x+h)}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+h}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+h}}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{x-x-h}{h\sqrt{x(x+h)}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{\sqrt{x(x+h)}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}$$
$$= \frac{-1}{\sqrt{x^2}\cdot 2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}.$$

(3)

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x-(x+h)}{hx(x+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}.$$

7.2 (1)

$$\frac{|0+h|-|0|}{h} = \frac{|h|}{h} \longrightarrow \begin{cases} 1 & (h \to +0) \\ -1 & (h \to -0) \end{cases}$$

より，$h \to 0$ のときの極限が存在しないから，微分不可能である．

(2) 定義域は $x \geqq 0$ であるから，$\displaystyle\lim_{h\to -0} \frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h} = \lim_{h\to -0} \frac{\sqrt{h}}{h}$ は存在しない．ゆえに $h \to 0$ のときの極限が存在せず，微分不可能である．

(3)

$$\lim_{x\to +0} [x] = 0, \quad \lim_{x\to -0} [x] = -1$$

であるから，極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0} [x]$ は存在しない．ゆえに $f(x) = [x]$ は $x = 0$ で連続ではない．したがって微分不可能．

7.3 (1) $-f'(a)$ (2) $4f'(a)$

7.4 (1) $y' = 5x^4$ (2) $y' = -2x + 1$ (3) $y' = 42x^6 + 24x^2$ (4) $y' = 0$

(5) $y' = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$ (6) $y' = \dfrac{5\sqrt[3]{x^2}}{3}$ (7) $y' = -\dfrac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$ (8) $y' = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

(9) $y' = -\dfrac{1}{2x^3}$ (10) $y' = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{2x^3}$ (11) $y' = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^4}$ (12) $y' = -\dfrac{3}{2x^2\sqrt{x}}$

7.5 (1) $y' = 4x^3$ (2) $y' = 5x^4 + 3x^2 + 2x$ (3) $y' = 3x^2 + 6x + 2$

(4) $y' = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$ (5) $y' = -\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$ (6) $y' = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

7.6 (1) $y' = 3(x-3)^2$ (2) $y' = 8x(x^2+5)^3$ (3) $y' = 3x(x-2)$

(4) $y' = \dfrac{-6x}{(x^2+1)^4}$ (5) $y' = \dfrac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$

(6) $y' = 4\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^3$

7.7 (1) $\dfrac{1}{e}$ (2) e^2 (3) e^3 (4) $\dfrac{1}{e}$

7.8 (1) $y' = 3x^2(1 + \tan^2 x^3)$ (2) $y' = 4\cos 4x$ (3) $y' = -4\sin x\cos^3 x$

(4) $y' = \pi\cos(2\pi x)$ (5) $y' = \dfrac{1}{x}$ (6) $y' = \dfrac{x}{(x^2+1)\log 2}$

(7) $y' = \dfrac{(x-3)\log|x-3| + x}{(x-3)\log 2}$ (8) $y' = \dfrac{4(\log x)^3}{x}$ (9) $y' = -2xe^{-x^2}$

(10) $y' = 2\cdot 9^{x+1}\log 3$ (11) $y' = (1+x)e^x$ (12) $y' = 2^x\left(\log x + \dfrac{1}{x\log 2}\right)$

(13) $y' = -\sin x\cos(\cos x)$ (14) $y' = -\dfrac{1}{2\tan x}$ (15) $y' = -\sin x\ e^{\cos x}$

(16) $y' = \dfrac{\cos\log x}{x}$ (17) $y' = \dfrac{-e^x}{2(1+e^x)\sqrt{1+e^x}}$ (18) $y' = 3^{\tan x}\log 3(1+\tan^2 x)$

(19) $y' = \dfrac{2e^x}{e^{2x}-1}$ (20) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

7.9 (1) $y' = x^x(\log x + 1)$ (2) $y' = 2x^{\log x - 1}\log x$

(3) $y' = x^{\tan x}\left(\dfrac{\log x}{\cos^2 x} + \dfrac{\tan x}{x}\right)$ (4) $y' = (\log x)^x\left(\log(\log x) + \dfrac{1}{\log x}\right)$

(5) $y' = (x+2)(x+3)^2(x+4)^3(9x^2+52x+72)$ (6) $y' = -\dfrac{(x+1)(5x^2+14x+5)}{(x+2)^4(x+3)^5}$

7.10 (1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{y}$ (2) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x^2}{y^2}$ (3) $\dfrac{dy}{dx} = -\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ (4) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{2x}$

7.11 (1) $\dfrac{dy}{dx} = 2t^2$ (2) $\dfrac{dy}{dx} = -2\sin t$ (3) $\dfrac{dy}{dx} = -\tan t$ (4) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sin t}{1-\cos t}$

7.12 (1) 1 (2) $3\sin^2 a\cos a$ (3) a

7.13 (1) $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ (2) $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ (3) $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n}{n!x^{n+1}}$
(4) $f^{(n)}(x) = a^n e^{ax}$ (5) $f^{(n)}(x) = a^x(\log a)^n$

7.14 $-6x+10$.

7.15 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1+x^2}$

〈8 章〉

8.1 (1) 接: $y = x+1$，法: $y = -x+1$
(2) 接: $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x + \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}\pi}{8}$，法: $y = -\sqrt{2}x + \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}\pi}{4}$
(3) 接: $y = -\dfrac{2}{3}x+4$，法: $y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{5}{2}$ (4) 接: $y = \dfrac{1}{2}x+1$，法: $y = -2x+1$
(5) 接: $y = \dfrac{1}{e}x$，法: $y = -ex + e^2 + 1$ (6) 接: $y = 1$，法: $x = 0$

8.2 (1) 接: $y = -x + 2\sqrt[3]{2}$，法: $y = x$ (2) 接: $y = -\dfrac{1}{2}x+3$，法: $y = 2x-7$
(3) 接: $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$，法: $y = 2x-1$

8.3 (1) 接: $y = -x + \dfrac{1}{2}$，法: $y = x - \dfrac{1}{2}$ (2) 接: $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$，法: $y = 2x-1$
(3) 接: $y = x - \dfrac{\pi^2}{2} + 2\pi$，法: $y = -x + \dfrac{\pi^2}{2}$

8.4 (1) $(0,0)$ (2) $(0,1)$，$\left(\dfrac{\pi}{2}, -1\right)$

8.5 (1) $y = \dfrac{1}{e}x + 1 - \dfrac{1}{e}$ (2) $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$ (3) $y = -x+2$

8.6 $k = 1,\ -3,\ \dfrac{3}{2}$

8.7 (1) $f(x) = \log x$ とおく．$a > 0$ より $f(x)$ は $1 \leqq x \leqq a+1$ で連続かつ微分可能であるから，平均値の定理より

$$\frac{\log(a+1)}{a} = \frac{\log(a+1) - \log 1}{(a+1)-1} = \frac{f(a+1)-f(1)}{(a+1)-1} = f'(c) = \frac{1}{c} \quad (1 < c < a+1)$$

を満たす実数 c が存在する．いま，$\dfrac{1}{a+1} < \dfrac{1}{c} < 1$ であるから，$a > 0$ のとき

$$\frac{1}{a+1} < \frac{\log(a+1)}{a} < 1.$$

(2) $f(x) = \log x$ とおく．$a > 0$ より $f(x)$ は $a \leqq x \leqq a+1$ で連続かつ微分可能であるから，平均値の定理より

$$\log(a+1) - \log a = \frac{\log(a+1) - \log a}{(a+1) - a} = \frac{f(a+1) - f(a)}{(a+1) - a} = f'(c) = \frac{1}{c} \quad (a < c < a+1)$$

を満たす実数 c が存在する．いま，$\dfrac{1}{a+1} < c < \dfrac{1}{a}$ であるから，$a > 0$ のとき

$$\frac{1}{a+1} < \log(a+1) - \log a < \frac{1}{a}.$$

8.8 (1) 1　(2) -1　(3) 2

8.9 (1) $x = -1$ で極小値 $-1/e$　(2) $x = 0$ で極大値 -1

(3) $x = \pi/6,\ 5\pi/6$ で極大値 $3/2$，$x = \pi/2$ で極小値 1，$x = 3\pi/2$ で極小値 -3

(4) $x = \pi/2$ で極大値 $\sqrt{e^{\pi}}$，$x = 3\pi/2$ で極小値 $-e^{\pi}\sqrt{e^{\pi}}$

(5) $x = 0,\ 2$ で極小値 0　(6) $x = 0$ で極小値 0

8.10 (1) $y' = \dfrac{x^2 + 2x + a}{(x+1)^2}$ である．y が極値をもつためには，$y' = 0$ となるような x の前後で y' の符号が変化していなければならない．y' の分母はつねに非負であるから，符号の変化は分子のみに着目して考えれば良い．分子は 2 次関数であるから，方程式 $x^2 + 2x + a = 0$ が異なる 2 つの実数解を持てば条件を満たす．したがって判別式を用いて $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot a > 0$．よって $a < 1$.

(2) $y' = \cos x + a$ は連続である．$a \geqq 1$ のときは $y' \geqq 0$，$a \leqq -1$ のときは $y' \leqq 0$ であるから，求める範囲は $-1 < a < 1$.

8.11 (1) $x = 3$ で最大値 3，$x = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ で最小値 $-3\sqrt{2}$.

(2) $x = -1 + \sqrt{2}$ で最大値 $-2\sqrt{2}$，$x = -1 - \sqrt{2}$ で最大値 $\dfrac{1 + \sqrt{2}}{2}$.

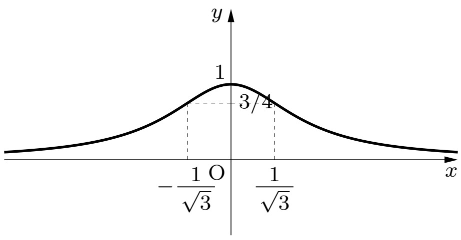
(3) $x = 0$ で最小値 0.

8.12 正方形になるとき，$4\sqrt{2}$

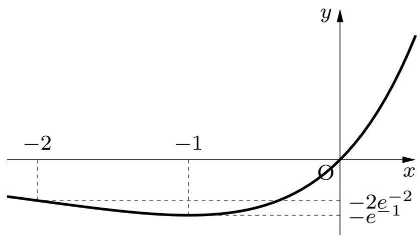
8.13 $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$

8.14 $\sqrt{5}$

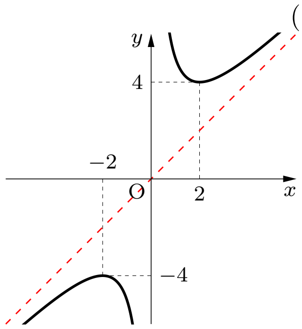
8.15


y
1
3/4
O
x
$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{1}{\sqrt{3}}$

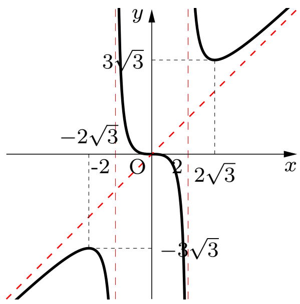
(1)


y
−2
−1
O
x
$-2e^{-2}$
$-e^{-1}$

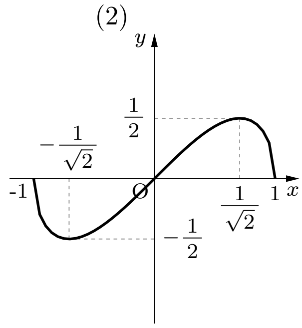
(2)


y
4
−2
O
2
x
−4

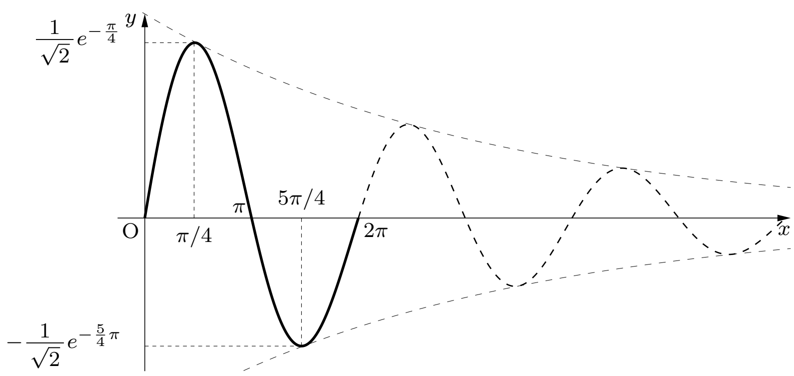
(3)


y
$3\sqrt{3}$
$-2\sqrt{3}$
-2
O
2
$2\sqrt{3}$
x
$-3\sqrt{3}$

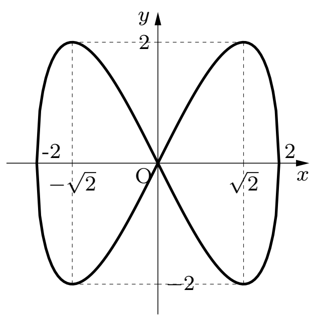
(4)


y
$\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
-1
O
$\frac{1}{\sqrt{2}}$
1
x
$-\frac{1}{2}$

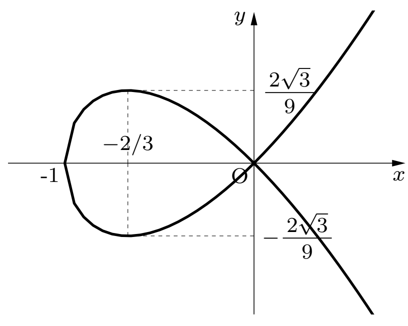
(5)


$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}}$
y
π
$5\pi/4$
O
$\pi/4$
2π
x
$-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{5}{4}\pi}$

(6)

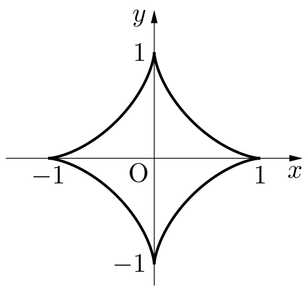

y
2
-2
2
$-\sqrt{2}$
O
$\sqrt{2}$
x
−2

(7)

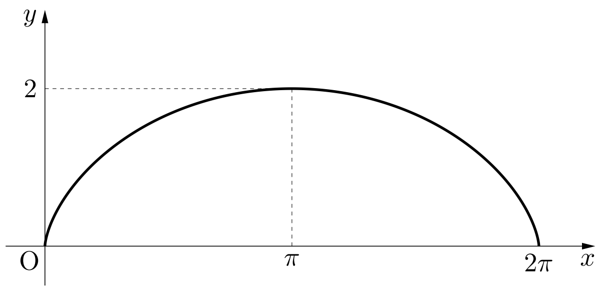

y
$\frac{2\sqrt{3}}{9}$
−2/3
-1
O
x
$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$

(8)

8.16



(1)



(2)

8.17 (1) $f(x) = x - \sin x$ とおくと，$f'(x) = 1 - \cos x \geqq 0$ である．ゆえに $f(x)$ はつねに増加する．また，$x > 0$ のとき $f(x) > f(0) = 0$ であるから，$x - \sin x > 0$．ゆえに $x > 0$ で $x > \sin x$.

(2) $g(x) = \cos x - 1 + \dfrac{1}{2}x^2$ とおくと，$x > 0$ で $g'(x) = -\sin x + x = f(x) > 0$ である．ゆえに $g(x)$ はつねに増加する．また，$x > 0$ のとき $g(x) > g(0) = 0$ であるから，$\cos x - 1 + \dfrac{1}{2}x^2 > 0$. ゆえに $x > 0$ で $\cos x > 1 - \dfrac{1}{2}x^2$.

(3) $h(x) = \sin x - x + \dfrac{1}{6}x^3$ とおくと，$x > 0$ で $h'(x) = \cos x - 1 + \dfrac{1}{2}x^2 = g(x) > 0$ である．ゆえに $h(x)$ はつねに増加する．また，$x > 0$ のとき $h(x) > h(0) = 0$ であるから，$x > 0$ で $\sin x > x - \dfrac{1}{6}x^3$.

8.18 (1) $f(x) = x - \cos x$ とおく．$f'(x) = 1 + \sin x > 0$ であるから，$f(x)$ はつねに増加する．ゆえに $f(x) = 0$ の実数解は存在すればただひとつである．いま，$f(0) = -1 < 0$, $f(\pi) = \pi + 1 > 0$ であるから，中間値の定理より $f(x) = 0$ は $0 < x < \pi$ の間に少なくとも 1 つ実数解をもつ．したがって $f(x) = 0$ は $0 < x < \pi$ の範囲でただ 1 つの実数解をもつ．

(2) $f(x) = x^3 + 6x - 5$ とおく．$f'(x) = 2x^2 + 6 > 0$ であるから，$f(x)$ はつねに増加する．ゆえに $f(x) = 0$ の実数解は存在すればただひとつである．いま，$f(0) = -5 < 0$, $f(1) = 2 > 0$ であるから，中間値の定理より $f(x) = 0$ は $0 < x < 1$ の間に少なくとも 1 つ実数解をもつ．したがって $f(x) = 0$ は $0 < x < 1$ の範囲でただ 1 つの実数解を持つ．

8.19 (a) $f'(x) = (n + 1 - x)x^n e^{-x}$ より，$f'(x) = 0$ となるのは $x = n + 1 > 0$ のとき．増減表は

x	0	$\cdots$	$n+1$	$\cdots$
y'	0	$+$	0	$-$
y	0	$\nearrow$	$f(n+1)$	$\searrow$

となるから，$f(x) \leqq f(n+1) = \dfrac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}}$ である．また，$x > 0$ で $x^{n+1} > 0$, $e^x > 0$ であるから，$f(x) > 0$ である．以上より

$$0 \leqq \frac{x^{n+1}}{e^x} \leqq \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}} \quad (x \geqq 0).$$

(b) 0（不等式 (a) の全辺に $1/x$ を掛けて，はさみうちの原理を用いよ.）

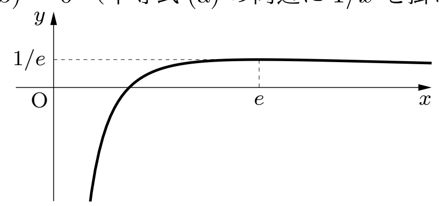
8.20　$r < 0,\ 4 < r$

8.21　(1)　(a)　$f'(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x} \geqq 0 \quad (x \geqq 1)$ であるから，$f(x)$ は $x \geqq 1$ でつねに増加する．したがって $f(x) \geqq f(1) = 2$ であるから，$2\sqrt{x} \geqq 2 + \log x$．また，$x \geqq 1$ で $\log x \geqq 0$ であるから

$$0 \leqq \log x < 2 + \log x \leqq 2\sqrt{x}.$$

(b)　0（不等式 (a) の両辺に $1/x$ を掛けて，はさみうちの原理を用いよ．）

(2)



(3)　（イ）　$2^e < e^2$

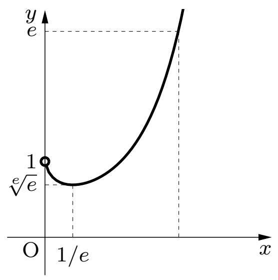
（ロ）　$3^\pi > \pi^3$

（ハ）　$e^\pi > \pi^e$

8.22　$a \leqq \dfrac{e^2}{4}$

8.23 (1)　0　　(2)　1

(3)



$g(x) = f(x) - e$ とおく．
$g(1) = 1 - e < 0,\ g(2) = 4 - e > 0$ であるから，中間値の定理より方程式 $f(x) = e$ は $1 < x < 2$ に少なくとも 1 つ実数解をもつ．グラフより，それはただ 1 つである．

8.24 (1)　$\overrightarrow{v} = (v_0 + gt, 0),\ \overrightarrow{a} = (g, 0)$　　(2)　$\overrightarrow{v} = (A\omega \sin \omega t, 0),\ \overrightarrow{a} = (-A\omega^2 \cos \omega t, 0)$

(3)　$\overrightarrow{v} = (1 - \cos t, \sin t),\ \overrightarrow{a} = (\sin t, \cos t)$

8.25　135°

〈9 章〉

9.1 (1)　$\dfrac{4}{9}\sqrt[4]{x^9} + C$　　(2)　$\displaystyle\int (1 + \tan^2 x)\,dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

(3)　$\dfrac{4^{x+2}}{\log 4} + C$　　(4)　$\dfrac{2^x e^x}{\log 2 + 1} + C$

9.2 (1)　$\dfrac{1}{9}(x+3)^9 + C$　　(2)　$\dfrac{1}{8\sqrt{4t+1}} + C$　　(3)　$-\dfrac{1}{2}\cos(2\theta + \pi) + C$

(4)　$\dfrac{(2x-1)(x+2)^5}{10} + C$　　(5)　$\dfrac{2}{5}x\sqrt{x}(x+5) + C$　　(6)　$(e^x + 3)^6 + C$

(7) $x+C$ (8) $\log(e^x+e^{-x})+C$ (9) $\log|(\log y)|+C$

(10) $-\frac{1}{5}\cos^5 x+C$ (11) $\frac{1}{3}e^{x^3}+C$ (12) $e^{(y-1)(y+2)}+C$

9.3 (1) $-x\cos x+\sin x+C$ (2) $(x+3)\log(x+3)-x+C$

(3) $x\log(x^2-1)+\log\frac{x+1}{x-1}-2x+C$ (4) $e^{-x}(1-x)+C$

(5) $\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{4}x^2+C$ (6) $2x\tan x+2\log|\cos x|+C$

(7) $x\{(\log x)^2-2\log x+2\}+C$ (8) $(x^2-2x+2)e^x+C$

(9) $\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)+C=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+C$

9.4 (1) $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+\log|x-1|+C$ (2) $x+\frac{1}{2}\log(x^2+1)+C$

(3) $\frac{1}{4}\log\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$ (4) $\frac{1}{2}\log|x+1|-\frac{1}{3}\log|x-2|+C.$

9.5 (1) $\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x}+C$ (2) $\frac{1}{e^x+1}+C$

(3) $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{20}\sin 10x+C$ (4) $\frac{1}{12}\sin 6x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$

(5) $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x}}+C$ (6) $\frac{1}{2\sqrt{3x+4}}+\frac{2}{3}x+C$

9.6 (1) $F(x)=xe^x+3$ (2) $F(x)=\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{4}x^2+\frac{5}{4}$

9.7 (1) $\log|\tan x|+C$ (2) $\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$

(3) $\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+C$

9.8 (1) 1 (2) 2 (3) 2 (4) $e+2-\frac{1}{e}$ (5) $\frac{3}{10}(3-\sqrt[3]{4})$(6) $-\frac{1}{4}\log 3$

9.9 (1) $\frac{341}{5}$ (2) $\log 2$ (3) $\frac{e-1}{3}$ (4) $\frac{9}{4}\pi$ (5) $\frac{\pi}{6}$ (6) $\frac{5}{36}\pi$

9.10 (1) $\frac{\pi}{2}+1$ (2) $\frac{32}{5}\log 2-\frac{31}{25}$ (3) $\frac{1}{4}$ (4) $\frac{7}{30}$

9.11 (1) $f(x)=e^2+2,\ a=-1$ (2) $f(x)=\frac{2}{\pi^2}(\sin 2x+x),\ a=\frac{2}{\pi^2}$

9.12 (1) $f(x)=\sin^2 x-\frac{\pi}{2(\pi-1)}$ (2) $f(x)=x-\frac{1}{e-2}$

9.13 (1) $F'(x) = 2xe^x + e^x - 1$ (2) $F'(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x$

9.14 (1) $\begin{cases} \pi & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$ (2) 0 (3) $\begin{cases} \pi & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$

9.15 (1) 0 (2) 0 (3) 0 (4) π

9.16 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{17}{6}$ (3) $\frac{1}{2}\log 2$

9.17 (1) $a_1 = 1$

(2) 部分積分法より

$$\int_0^h t^{n+1}e^{-t}\,dt = \Big[-t^{n+1}e^{-t}\Big]_0^h + \int_0^h (n+1)t^n e^{-t}\,dt = -h^{n+1}e^{-h} + (n+1)\int_0^h t^n e^{-t}\,dt$$

が成り立つ．$n \to \infty$ の極限をとれば

$$a_{n+1} = \lim_{h\to 0}\int_0^h t^{n+1}e^{-t}\,dt = \lim_{h\to 0}\left(-h^{n+1}e^{-h} + (n+1)\int_0^h t^n e^{-t}\,dt\right) = (n+1)a_n.$$

(3) $a_n = n!$

9.18 (1)

$$\text{（左辺）} = \sum_{k=1}^{n}\log\frac{n+k}{n} = \sum_{k=1}^{n}\big(\log(n+k) - \log n\big) = \log(n+1)(n+2)\cdots(n+n) - n\log n$$
$$= \log\frac{1\cdot 2\cdots n\cdot(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{1\cdot 2\cdots n} - n\log n = \log\frac{(2n)!}{n!} - n\log n$$
$$= \log a_n - n\log n = \text{（右辺）}$$

(2) $2\log 2 - 1$ （区分求積法を用いよ.） (3) $\frac{4}{e}$

9.19

$$0 \leqq \int_a^b \{f(x) + tg(x)\}^2\,dx = \int_a^b \{f(x)^2 + 2tf(x)g(x) + t^2g(x)^2\}\,dx$$
$$= t^2\int_a^b g(x)^2\,dx + 2t\int_a^b f(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)^2\,dx$$

であるから

$$a = \int_a^b g(x)^2\,dx,\quad b = \int_a^b f(x)g(x)\,dx,\quad c = \int_a^b f(x)^2\,dx$$

とおいて，t についての 2 次式 $y = at^2 + 2bt + c \quad (a, c \geqq 0)$ がどのような t に対しても $y \geqq 0$ となるような条件を調べる．$a = 0$ のときはどのような x に対しても $f(x) = 0$ となるから，$0 \leqq 0$ となって

示す不等式は成立していることが判る． $a \neq 0$ のとき，$y = ax^2 + 2bx + c$ は下に凸な放物線であるから，放物線が x 軸に接するか，または x 軸より上側にあれば条件 $y \geqq 0$ を満たす．したがって判別式 $D \leqq 0$ を考えればよい;

$$0 \geqq D/4 = b^2 - ac \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 = b^2 \leqq ac = \left(\int_a^b g(x)^2\,dx\right)\left(\int_a^b f(x)^2\,dx\right).$$

9.20 (1) $a_0 = \dfrac{\pi}{4}$ （$x = \tan t$ と置き換えよ.） また，$0 \leqq x \leqq 1$ のとき $0 \leqq \dfrac{1}{x^2+1} \leqq 1$ であるから

$$0 \leqq a_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{x^2+1}\,dx \leqq \int_0^1 x^{2n}\,dx = \frac{1}{2n+1}$$

が成り立つ．$n \to \infty$ の極限をとれば，はさみうちの原理より $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

(2) $\dfrac{1}{2n+1}$

(3) $\pi/4$

9.21 (1) $a_1 = \dfrac{\log 2}{2}$，$a_n + a_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$

(2) $0 \leqq x \leqq \pi/4$ のとき $0 \leqq \tan x \leqq 1$ であるから，$a_n \geqq 0,\ a_{n+2} \geqq 0$ である．よって

$$0 \leqq a_n \leqq a_n + a_{n+2} = \frac{1}{n+1}$$

が成り立つ．$n \to \infty$ の極限をとれば，はさみうちの原理より $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

(3) $\log 2$

9.22 (1) $a_0 = \dfrac{\log 2}{2}$．また，$0 \leqq x \leqq \pi/4$ のとき $0 \leqq \sin x \leqq 1/\sqrt{2},\ 0 \leqq \tan x \leqq 1$ より

$$0 \leqq a_n = \int_0^{\pi/4} \sin^{2n} x \tan x\,dx \leqq \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n} dx = \frac{\pi}{2^{n+2}}$$

が成り立つ．$n \to \infty$ の極限をとれば，はさみうちの原理より $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

(2) $-\dfrac{1}{(n+1)2^{n+2}}$

(3) $\log 2$

9.23 (1) $a_1 = -\dfrac{2}{e} + 1.$ また，$0 \leqq x \leqq 1$ のとき $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq e^{-x} \leqq 1$ であるから

$$0 \leqq a_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 x^n e^{-x}\,dx \leqq \frac{1}{n!}\int_0^1 dx = \frac{1}{n!}$$

が成り立つ．$n \to \infty$ の極限をとれば，はさみうちの原理より $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

(2) 部分積分法により，$a_{n+1} - a_n = -\dfrac{1}{(n+1)!e}$

(3) e

9.24 (1) $I_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2},\ I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = 1.$

(2)　部分積分法により

$$\begin{aligned}
I_{m+2} &= \int_0^{\pi/2} \sin^{m+2} x\,dx = \int_0^{\pi/2} (-\cos x)' \sin^{m+1} x\,dx \\
&= \Big[-\cos x \sin^{m+1} x\Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (m+1)\cos^2 x \sin^m x\,dx \\
&= (m+1)\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 x)\sin^m x\,dx \\
&= (m+1)\int_0^{\pi/2} \sin^m x\,dx - (m+1)\int_0^{\pi/2} \sin^{m+2} x\,dx \\
&= (m+1)I_m - (m+1)I_{m+2}
\end{aligned}$$

が成り立つ．I_{m+2} を移項して整理すれば，示す等式を得る．

(3)　$I_5 = \dfrac{8}{15}$，　$I_6 = \dfrac{5}{32}\pi$.

9.25　$\dfrac{1}{2} - \dfrac{4}{\pi^2}$

〈10 章〉

10.1　$y = x^{-2}$ のグラフから

$$\sum_{k=2}^{N} \leqq \int_1^N \frac{dx}{x^2}$$

であることを示し，右辺を計算すればよい．

10.2　(1)

$$V = \pi\int_{-r}^{r} (R+\sqrt{r^2-x^2})^2\,dx - \pi\int_{-r}^{r} (R-\sqrt{r^2-x^2})^2\,dx = 4\pi R\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\,dx = 2\pi^2 r^2 R.$$

10.3　2 つの円の交点は $(0,\sqrt{3})$ と $(0,-\sqrt{3})$ であるから，

$$V = \pi\int_{-3-2\sqrt{3}}^{0} (\sqrt{-x^2-6x+3})^2\,dx + \pi\int_0^{1+2} (\sqrt{-x^2+2x+3})^2\,dx = 36+16\sqrt{3}\pi.$$

10.4　囲まれた領域のうち，$y \geqq 0$ の領域と $y \leqq 0$ の領域で，回転させたときに重なる部分を考慮すること．$y \leqq 0$ の領域を x 軸で折り返せば，回転させるべき領域が判る．

$$V = 2\left(\pi\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin x - \cos x)^2\,dx + \pi\int_{\pi/2}^{3\pi/4} (\sin x)^2\,dx\right) = \frac{3}{4}\pi^2 - \frac{\pi}{2}.$$

10.5　(1)

$$L = \int_0^4 \sqrt{1+((x\sqrt{x})')^2}\,dx = \int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx = \left[\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}\right]_0^4 = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right).$$

(2)

$$L = \int_0^{\pi/6} \sqrt{1 + ((\log(\cos x))')^2}\, dx = \int_0^{\pi/6} \sqrt{1+\tan^2 x}\, dx = \int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\cos x}$$
$$= \left[\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right]_0^{\pi/6} = \frac{\log 3}{2}.$$

(3)

$$L = \int_0^1 \sqrt{((e^t \cos t)')^2 + ((e^t \sin t)')^2}\, dt = \sqrt{2}\int_0^1 e^t\, dt = \sqrt{2}(e-1).$$

(4)

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{((\cos^3 t)')^2 + (\sin^3 t)')^2}\, dt = \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} (1-\cos 4t)\, dt = \frac{\pi}{16}.$$

10.6 楕円の方程式を y について解くと

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

である．L の長さは上の方程式が表す曲線の $x \geqq 0,\ y \geqq 0$ の部分の長さを 4 倍すれば得られるから

$$L = 4\int_0^a \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = 4\int_0^a \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}\frac{x^2}{a^2 - x^2}}\, dx.$$

ここで，$x = a\cos\theta$ と置換すれば

$$L = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}\frac{a^2\cos^2\theta}{a^2\sin^2\theta}}(-a\sin\theta)\, d\theta = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}\, d\theta$$
$$= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2-a^2}{2}\cos 2\theta}\, d\theta$$

を得る．定積分に対する Cauchy-Schwarz の定理より

$$L \leqq 4\sqrt{\left(\int_0^{\pi/2} 1^2\, d\theta\right)\left(\int_0^{\pi/2} \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2-a^2}{2}\cos 2\theta\, d\theta\right)} = 4\sqrt{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a^2+b^2}{4}\pi} = \pi\sqrt{2(a^2+b^2)}.$$

※【別解】 $x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta$ と媒介変数表示すれば，L は $0 \leqq \theta \leqq \pi/2$ での長さの 4 倍であるから，

$$L = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{((a\cos\theta)')^2 + ((b\sin\theta)')^2}\, d\theta = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}\, d\theta$$

を得る．以下，本解と同じ．なお，この積分は楕円積分とよばれ，初等的に（不定）積分が求められないことが知られている．

10.7 (1)
- $u \leqq 0$ のとき: $u^2 \geqq 0$ であるから，$1 + u^2 > 0$．ゆえに $\sqrt{1+u^2} > 0$ である．したがって $u \leqq 0 < \sqrt{1+u^2}$ であるから，不等式は成り立つ．
- $u > 0$ のとき: $u^2 < 1 + u^2$ が成り立つ．いま，$u > 0,\ 1 + u^2 > 0$ であるから，両辺の平方根を考えても不等式は成立し，$u < \sqrt{1+u^2}$ が成り立つ．

(2)
- $e^t = s > 0$ とおけば $s = u \pm \sqrt{u^2+1}$ を得るから，(1) を考慮して $s = u + \sqrt{u^2+1}$．ゆえに $t = \log\left(u + \sqrt{u^2+1}\right)$．

- $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$.

(3)

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^1 \sqrt{1 + (x^2)'}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{1 + u^2}\, du = \frac{1}{2}\int_0^{\log(2+\sqrt{5})} \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 dt \\
&= \frac{2\sqrt{5} + \log(2 + \sqrt{5})}{4}.
\end{aligned}
$$

※対数の定義から $e^{\log(2+\sqrt{5})} = 2 + \sqrt{5}$ となることに注意せよ.

演習問題　解答

〈1 章〉

偏角は度数法または弧度法，どちらで解答してもよい．解答例では設問に応じて使いやすい方を用いている．

1.1　$a,\ b,\ c,\ d$ を実数として，$z=a+bi,\ w=c+di$ とおく．

1)　$\overline{z+w}=\overline{(a+c)+(b+d)i}=(a+c)-(b+d)i=(a-bi)+(c-di)=\overline{a+bi}+\overline{c+di}=\overline{z}+\overline{w}.$

2)　$\overline{z-w}=\overline{(a-c)+(b-d)i}=(a-c)-(b-d)i=(a-bi)-(c-di)=\overline{a+bi}-\overline{c+di}=\overline{z}-\overline{w}.$

3)　$(\text{左辺})=\overline{zw}=\overline{(a+bi)(c+di)}=\overline{(ac-bd)+(ad+bc)i}=(ac-bd)-(ad+bc)i,$

$(\text{右辺})=\overline{z}\cdot\overline{w}=(a-bi)(c-di)=(ac-bd)-(ad+bc)i.$

ゆえに右辺と左辺が等しいから，等式は成り立つ．

4)　$\dfrac{1}{w}=\alpha$ とおく．$w\alpha=1$ より $\overline{w\alpha}=\overline{1}=1$ であるから，$\overline{\alpha}=\dfrac{1}{\overline{w}}$ が成り立つ．3) より

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\overline{\left(z\cdot\frac{1}{w}\right)}=\overline{z\alpha}=\overline{z}\cdot\overline{\alpha}=\overline{z}\cdot\frac{1}{\overline{w}}=\frac{\overline{z}}{\overline{w}}.$$

5)　数学的帰納法で示す．$n=1$ のときは明らかである．$n=k$ のとき，$\overline{z^k}=\overline{z}^k$ が成立すると仮定すると，3) より

$$\overline{z^{k+1}}=\overline{z^k\cdot z}=\overline{z^k}\cdot\overline{z}=\overline{z}^k\cdot\overline{z}=\overline{z}^{k+1}.$$

1.2　(1)　$z=x+yi$（x,y は実数）とおくと

$$\frac{z+\overline{z}}{2}=\frac{(x+yi)+(x-yi)}{2}=x$$

であるから，これは実数である．

(2)　z を (1) と同様に定めると

$$\frac{z-\overline{z}}{2i}=\frac{(x+yi)-(x-yi)}{2i}=y$$

であるから，これは実数である．

(3)　$w=z^2+(\overline{z})^2$ とおく．

$$\overline{w}=\overline{z^2+(\overline{z})^2}=\overline{z^2}+\overline{(\overline{z})^2}=\overline{z^2}+z^2=w$$

であるから，Th 1.2 より，これは実数である．

(4)　$w=z^2-(\overline{z})^2$ とおく．

$$\overline{w}=\overline{z^2-(\overline{z})^2}=\overline{z^2}-\overline{(\overline{z})^2}=\overline{z^2}-z^2=-w$$

であるから，$w\neq 0$ に注意すれば，Th 1.2 より，これは純虚数である．

1.3　$z=x+yi$（x,y は実数）とおくと

$$z+\frac{1}{z}=x+iy+\frac{1}{x+iy}=x+iy+\frac{x-iy}{x^2+y^2}=x+\frac{x}{x^2+y^2}+\left(y-\frac{y}{x^2+y^2}\right)i$$

である．この値が実数になるためには虚部が 0 であればよいから

$$y - \frac{y}{x^2+y^2} = y\left(1 - \frac{1}{x^2+y^2}\right) = 0.$$

ゆえに $y = 0$ または $x^2 + y^2 = 1$．ここで，$z \neq 0$ より $y = 0$ のときは $x \neq 0$ である．したがって，$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ であることに注意すれば，z の満たすべき条件は，「z が 0 でない実数であるか，または $|z| = 1$ を満たすこと」である．

【別解】 $w = z + \dfrac{1}{z}$ とおく．w が実数であるためには $w = \overline{w}$ が成り立てばよい．

$$z + \frac{1}{z} = w = \overline{w} = \overline{\left(z + \frac{1}{z}\right)} = \overline{z} + \frac{1}{\overline{z}}$$

より，

$$(z - \overline{z}) + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\overline{z}}\right) = 0.$$

ここで，$z\overline{z} = |z|^2$ に注意すれば，左辺は

$$(z - \overline{z}) + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\overline{z}}\right) = (z - \overline{z}) + \frac{\overline{z} - z}{z\overline{z}} = (z - \overline{z})\left(1 - \frac{1}{|z|^2}\right)$$

となる．この式の値が 0 になればよいから，$z - \overline{z} = 0$ または $|z|^2 = 1$ である．したがって「z が 0 でない実数であるか，または $|z| = 1$ を満たすこと」が条件である．

1.4 偏角を求める手順は (1) のみ載せる．

(1) $|\alpha| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ である．また，$\arg\alpha = \theta$ とすると，θ は

$$\sin\theta = \frac{1}{2}, \quad \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

を満たすから，$\arg\alpha = 30°$．

(2) $|\beta| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2, \quad \arg\beta = 90°$.

(3) $|\gamma| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = 3, \quad \arg\gamma = 180°$.

(4) $\delta = \dfrac{-7-i}{4-3i} \cdot \dfrac{4+3i}{4+3i} = -1 - i$ より，$|\delta| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, \quad \arg\delta = 225°$.

1.5 (a) $n = 0$ のときは

$$1 = (\cos\theta + i\sin\theta)^0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$$

より成り立つ．$n = 1$ のときは明らかに成り立つ．$n = k$ のとき

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^k = \cos k\theta + i\sin k\theta$$

が成り立つと仮定する．$n = k + 1$ のとき

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^{k+1} &= (\cos\theta + i\sin\theta)^k \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)\\ &= (\cos k\theta + i\sin k\theta) \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)\\ &= \cos k\theta\cos\theta + i\sin\theta\cos k\theta + i\sin k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta\\ &= (\cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta) + i(\sin k\theta\cos\theta + \cos k\theta\sin\theta)\\ &= \cos(k\theta + \theta) + i\sin(k\theta + \theta)\\ &= \cos(k+1)\theta + i\sin(k+1)\theta\end{aligned}$$

であるから，このときも等式は成立する．ただし，５つ目の等号には三角関数の加法定理を用いた．したがって，$n = 0, 1, 2, \ldots$ に対してこの等式は成り立つ．

(b) n を負の整数とする．$m = -n$ とおけば m は正の整数であるから，

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^{-m} &= \frac{1}{(\cos\theta + i\sin\theta)^m} = \frac{1}{\cos m\theta + i\sin m\theta} \\ &= \frac{1}{\cos m\theta + i\sin m\theta} \cdot \frac{\cos m\theta - i\sin m\theta}{\cos m\theta - i\sin m\theta} = \cos m\theta - i\sin m\theta \\ &= \cos{(-m)\theta} + i\sin{(-m)\theta} = \cos n\theta + i\sin n\theta\end{aligned}$$

であるから成り立つ．ただし，６つ目の等号では三角関数の性質

$$\cos{(-\theta)} = \cos\theta,\ \ \sin{(-\theta)} = -\sin\theta$$

を用いた．

1.6 $|\alpha| = 2, \quad |\beta| = \sqrt{2}, \quad \arg\alpha = 120°, \quad \arg\beta = 45°$ である．

(1) $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta| = 2\sqrt{2}, \quad \arg{(\alpha\beta)} = \arg\alpha + \arg\beta = 120° + 45° = 165°$.

(2) $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|} = \sqrt{2}, \quad \arg\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right) = \arg\alpha - \arg\beta = 120° - 45° = 75°$.

1.7 (1) $\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{(\sqrt{2} - \sqrt{6}) + i(\sqrt{2} + \sqrt{6})}{1 + \sqrt{3}i} = \sqrt{2} + \sqrt{2}i.$

(2) $\arg\alpha = 60°$，$\arg\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right) = 45°$ と計算できるから，$\arg\beta = \arg\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right) - \arg\alpha = 45° - 60° = -15°$．範囲を合わせれば，求める偏角は $-15° + 360° = 345°$[*24]．

1.8 (1) $1 + i = \sqrt{2}(\cos\pi/4 + i\sin\pi/4)$ である．de Moivre の定理より

$$(1+i)^8 = (\sqrt{2})^8\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^8 = 2^4(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 2^4 = 16.$$

(2) $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i} = \dfrac{\sqrt{2}(\cos\pi/4 + i\sin\pi/4)}{2(\cos\pi/6 + i\sin\pi/6)}$ である．de Moivre の定理より

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^{12} = \frac{(\sqrt{2})^{12}(\cos\pi/4 + i\sin\pi/4)^{12}}{2^{12}(\cos\pi/6 + i\sin\pi/6)^{12}} = \frac{2^6(\cos 3\pi + i\sin 3\pi)}{2^{12}(\cos 2\pi + i\sin 2\pi)} = \frac{-1}{2^6} = -\frac{1}{64}.$$

(3) $\dfrac{-4+i}{5+3i} = \dfrac{-17+17i}{34} = \dfrac{1}{2}(1+i) = \cos\pi/4 + i\sin\pi/4$ である．de Moivre の定理より，-1.

1.9 (1) z は 1 の 8 乗根であるから，$z = \cos\dfrac{2k\pi}{8} + i\sin\dfrac{2k\pi}{8} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, 7)$ である．したがって，

$$z = 1, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i, \quad i, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i, \quad -1, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i, \quad -i, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i.$$

[*24] この結果から $\sin 15°$ 及び $\cos 15°$ の値を計算することができる．

(2) $z=1$ は（代入しても成り立たないから）この方程式の解ではない．ゆえに等比数列の和の公式より

$$0 = z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \frac{1-z^6}{1-z}$$

である．ゆえに $z^6 = 1$ であるが，これは 1 の 6 乗根を表すから，$z = \cos\dfrac{2k\pi}{6} + i\sin\dfrac{2k\pi}{6}$ $(k = 0,1,2,3,4,5)$ である．したがって，1 の 6 乗根のうち 5 つ（解は $z=1$ を除く）で，

$$z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad -1, \quad -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

(3) $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とおく．de Movire の定理より

$$r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta) = -2 + 2\sqrt{3}i.$$

が成り立つ．この式から $|-2+2\sqrt{3}| = 4$ が判るので，$r^4 = 4$．$r > 0$ より $r = \sqrt{2}$ であり，

$$\cos 4\theta = -\frac{1}{2}, \quad \sin 4\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

を得る．これを満たすのは $4\theta = 2\pi/3 + 2n\pi$ のときであるから，$0 \leqq \theta < 2\pi$ に注意して

$$\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{2} \quad (n = 0,1,2,3).$$

となる．したがって，$r = \sqrt{2}$ とともに $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ に代入して，

$$z = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i, \quad -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i.$$

1.10 (1) de Moivre の定理より，

$$z^{14} = \left(\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}\right)^{14} = \left(\cos\frac{14\pi}{7} + i\sin\frac{14\pi}{7}\right) = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1 + i\cdot 0 = 1.$$

(2) $z \neq 1$ に注意すると，等比数列の和の公式と $z^{14} = 1$ より，

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{13} = \sum_{k=1}^{14} z^{k-1} = \frac{z^{14}-1}{z-1} = \frac{1-1}{z-1} = 0.$$

(3) $2016 = 14 \times 144$ であるから，$z^{2017} = z^{2016}\cdot z = (z^{14})^{140}\cdot z = 1^{140}\cdot z = z$ となる．したがって，

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{2016} = \sum_{k=1}^{2017} z^{k-1} = \frac{z^{2017}-1}{z-1} = \frac{z-1}{z-1} = 1.$$

1.11 残りの頂点 z_2，z_3 は z_1 を原点中心に 120°，-120° だけ回転させれば得られるから

$$z_2 = z_1(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ) = 2i\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3} - i,$$

$$z_3 = z_1(\cos(-120^\circ) + i\sin(-120^\circ)) = 2i\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} - i.$$

1.12 (1) $|z|=|z-i|$ が成り立つ．両辺を 2 乗すると

$$z\overline{z}=|z|^2=|z-i|^2=(z-i)\overline{(z-i)}=(z-i)(\overline{z}+i)=z\overline{z}+i(z-\overline{z})+1$$

が成り立つから，

$$z-\overline{z}=\frac{-1}{i}=\frac{-1}{i}\cdot\frac{i}{i}=\frac{-i}{-1}=i.$$

(2) (1) より $i=z-\overline{z}$ である．両辺を 2 乗すると

$$-1=i^2=(z-\overline{z})^2=z^2-2z\overline{z}+\overline{z}^2=z^2-2|z|^2+\overline{z}^2=-2+z^2+\overline{z}^2$$

が成り立つから，$z^2+\overline{z}^2=1$ である．ここで，$1=|z|^2=z\overline{z}$ より，$\overline{z}=\dfrac{1}{z}$ が成り立つから，求める値は 1．

(3) $t=|z-ai|$ とおく．$z\overline{z}=|z|^2=1$ と $z-\overline{z}=i$ に注意して，

$$t^2=(z-ai)\overline{(z-ai)}=(z-ai)(\overline{z}+ai)=z\overline{z}+ai(z-\overline{z})+a^2=1-a+a^2=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

であるから，$a=\dfrac{1}{2}$ のとき，最小値 $\dfrac{3}{4}$ をとる．

※実は題意を満たすような z は 2 つのみである．具体的に z の値を求めて解いてもよい．

〈5 章〉

5.1 (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(n^5-n^3\right)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(n^2-1\right)=\infty.$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4n+3}{3n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{3}{n}}{3+\frac{5}{n}}=\frac{4+0}{3+0}=\frac{4}{3}.$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2^{n+4}-3^n)=\lim_{n\to\infty}3^n\left\{2^4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n-1\right\}=-\infty.$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^n-5^{n+1}}{3^n+8^{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n-5\left(\frac{5}{8}\right)^n}{\left(\frac{3}{8}\right)^n+8^2}=\frac{0-0}{0+64}=0.$

(5)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^2+3n+2}-3n\right)&=\frac{\left(\sqrt{9n^2+3n+2}-3n\right)\left(\sqrt{9n^2+3n+2}+3n\right)}{\sqrt{9n^2+3n+2}+3n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{\sqrt{9n^2+3n+2}+3n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}}{\sqrt{9+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}+3}=\frac{3+0}{\sqrt{9+0+0}+3}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(6) $0\leqq|\sin n^2|\leqq 1$ であるから $0\leqq\left|\dfrac{\sin n^2}{\sqrt{n}}\right|\leqq\dfrac{1}{|\sqrt{n}|}$ が成り立つ．ここで $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|\sqrt{n}|}=0$ であるから，はさみうちの原理より，求める極限は 0 である．

(7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\cos\frac{120\pi}{n}=\cos 0=1.$

(8) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}.$

5.2 (1) （特性方程式 $4p = 3p + 2$ の解は $p = 2$ であるから）与えられた漸化式は $a_{n+1} - 2 = \dfrac{3}{4}(a_n - 2)$ の形に変形できる．数列 $\{a_n - 2\}$ は公比 $\dfrac{3}{4}$，初項 $a_1 - 2 = -1$ の等比数列であるから

$$a_n - 2 = -\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \quad \text{であり} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} = \left(2 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right) = 2.$$

(2) 初項が正値であるから，漸化式の形より，すべての n について $a_n > 0$ である．漸化式の両辺の逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2 + a_n}{a_n} = \frac{2}{a_n} + 1$$

が成り立ち，したがってこの漸化式は

$$\frac{1}{a_{n+1}} + 1 = 2\left(\frac{1}{a_n} + 1\right)$$

と変形できる（難解であれば $1/a_n = b_n$ と置き換えてみよ）．数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n} + 1\right\}$ は公比，初項 2 の等比数列であるから

$$\frac{1}{a_n} + 1 = 2^n \quad \text{であり} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n - 1} = 0.$$

5.3 (1) 奇数が書かれた玉は 5 つの中の 3 つだから，$P_1 = \dfrac{3}{5}$．また，$n \geqq 2$ のとき，n 回目の和が奇数になるためには，$n-1$ 回目までの和が奇数で，かつ n 回目に偶数を引くか，$n-1$ 回目までの和が偶数で，かつ n 回目に奇数を引くかのどちらかである．ここで，$n-1$ 回目までの和が奇数である確率は P_{n-1}，偶数である確率は $1 - P_{n-1}$ と表せるから，

$$P_n = \frac{2}{5}P_{n-1} + \frac{3}{5}(1 - P_{n-1}) = -\frac{1}{5}P_{n-1} + \frac{3}{5}$$

が成り立つ．したがって，$\{P_n\}$ についての漸化式

$$P_{n+1} = -\frac{1}{5}P_n + \frac{3}{5}, \quad P_1 = \frac{3}{5}$$

を得る．問題 5.2 (1) と同様にして一般項を求めれば

$$P_n = \frac{1}{10}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}.$$

(2) (1) で求めた一般項を用いると

$$a^n\left(P_n - \frac{1}{2}\right) = \frac{a}{10}\left(-\frac{a}{5}\right)^{n-1}$$

である．これは公比が $\dfrac{a}{5}$ の等比数列であるから，その極限が収束するのは公比の絶対値が 1 より小さいか，あるいは公比が 1 のときである．したがって

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a}{10}\left(-\frac{a}{5}\right)^{n-1} = \begin{cases} 0 & (-5 < a < 5) \\ -1/2 & (a = -5) \end{cases}$$

5.4 (1) $y' = 2x$ であるから，接線 ℓ_0 の方程式は

$$y = 2 \cdot 2(x-2) + 2 = 4x - 6$$

である．a_1 は ℓ_0 と x 軸との交点であるから，$y = 0$ として，$a_1 = \dfrac{3}{2}$.
同様にして，接線 ℓ_n の方程式は

$$y = 2a_n(x - a_n) + a_n^2 - 2 = 2a_n x - a_n^2 - 2$$

である．a_{n+1} は ℓ_n と x 軸との交点であるから，$y = 0$ として，$a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} + \dfrac{1}{a_n}$.

(2) はじめに $\sqrt{2} \leqq a_n$ を数学的帰納法により示す．$a_1 \geqq \sqrt{2}$ は明らかである．$a_k \geqq \sqrt{2}$ を仮定すると，相加平均と相乗平均の大小関係より

$$a_{k+1} = \frac{a_k}{2} + \frac{1}{a_k} \geqq 2\sqrt{\frac{a_k}{2} \cdot \frac{1}{a_k}} = \sqrt{2}$$

が成り立つ．したがって，すべての自然数 n に対して $\sqrt{2} \leqq a_n$ が成り立つ．
これを利用すると

$$a_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} - \sqrt{2} \leqq \frac{a_n}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\bigl(a_n - \sqrt{2}\bigr).$$

(3) (2) で示した不等式の両辺は 0 以上であるから，次の不等式が成り立つ:

$$\bigl|a_{n+1} - \sqrt{2}\bigr| \leqq \frac{1}{2}\bigl|a_n - \sqrt{2}\bigr|.$$

これを繰り返し用いれば

$$\bigl|a_n - \sqrt{2}\bigr| \leqq \frac{1}{2}\bigl|a_{n-1} - \sqrt{2}\bigr| \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^2 \bigl|a_{n-2} - \sqrt{2}\bigr| \leqq \cdots \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \bigl|a_1 - \sqrt{2}\bigr| = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

が成り立つ．したがって，はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$.

5.5 (1) $\left|\dfrac{2}{7}\right| < 1$ であるから $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{7^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\frac{2}{7}\right)^{n-1} = \frac{2}{1 - \frac{2}{7}} = \frac{14}{5}$.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n + 3^{n+1}}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-2}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{-2}{3}}{1 - \left(\frac{-2}{3}\right)} + 3 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{-2}{5} + 3 = \frac{13}{5}$.

(3) 与えられた無限級数の第 N 部分和は，部分分数分解により

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1}\end{aligned}$$

である．無限級数の定義より，この極限を考えて

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N\to\infty}\left(1 - \frac{1}{N+1}\right) = 1.$$

(4) $\cos n\pi = (-1)^n$ である．したがって

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n \cos n\pi = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n = \frac{-\frac{2}{3}}{1-(-\frac{2}{3})} = -\frac{2}{5}.$$

(5) 与えられた無限級数の第 N 部分和は，分母の有理化により

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}+n} &= \sum_{n=1}^{N}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}+n}\cdot\frac{\sqrt{n^2+n}-n}{\sqrt{n^2+n}-n} \\
&= \sum_{n=1}^{N}\frac{n\sqrt{n+1}-n\sqrt{n}}{n^2+n-n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) \\
&= \left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\cdots+\left(\sqrt{N}-\sqrt{N-1}\right)+\left(\sqrt{N+1}-\sqrt{N}\right) \\
&= -1+\sqrt{N+1}
\end{aligned}$$

である．無限級数の定義より，この極限を考えて

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{N\to\infty}\left(-1+\sqrt{N+1}\right) = \infty$$

ゆえに正の無限大に発散する．

(6) 問題 5.1(8) より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2} = \frac{1}{2} \neq 0$$

である．Th 5.16 の対偶命題によりこの無限級数は発散する．

5.6 (1) 階差数列の公式より，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

が成り立つ．したがって，求める極限は

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1+1 = 2.$$

(2) 与えられた漸化式は

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n)$$

と変形できる．数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ は公比 $\dfrac{1}{2}$，初項 $a_2 - a_1 = 1$ の等比数列であるから

$$a_{n+1} - a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

である．ここで，階差数列の公式より，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

が成り立つ．したがって，求める極限は

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3.$$

5.7 (1) 初項 x^3，公比 x^3 の無限等比級数である．初項が 0 か，あるいは公比の絶対値が 1 未満であれば収束する．したがって

$$x^3 = 0 \quad \text{または} \quad |x^3| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad -1 < x^3 < 1$$

であるから，収束条件は $-1 < x < 1$．このときの和は $\dfrac{x^3}{1-x^3}$．これは初項が 0 のときも成立する．

(2) 初項 1，公比 $(x^2-1)^2$ の無限等比級数である．公比の絶対値が 1 未満であれば収束するから，

$$|x^2-1| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad -1 < x^2 - 1 < 1$$

であればよい．したがって

$$-\sqrt{2} < x < 0,\ 0 < x < \sqrt{2} \quad \text{で} \quad \frac{1}{1-(x^2-1)} = \frac{1}{2-x^2} \quad \text{に収束}.$$

(3) 初項 2^x，公比 2^x の無限級数である．公比が 1 未満であれば収束するから

$$|2^x| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad -1 < 2^x < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x > 0.$$

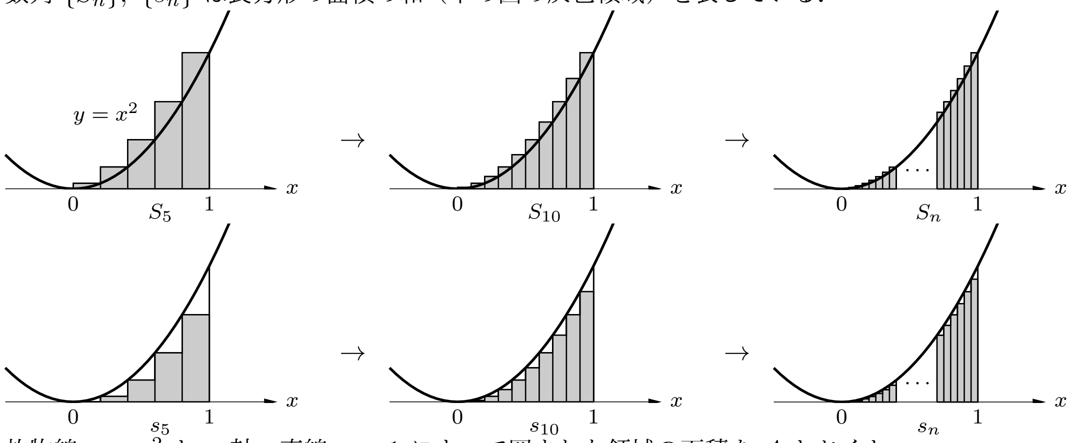
したがって $x > 0$ で $\dfrac{2^x}{1-2^x}$ に収束.

5.8

- $S_n = \dfrac{1}{n^3}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{1}{n^3}\cdot\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \dfrac{1}{6}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(2+\dfrac{1}{n}\right)$
- $s_n = \dfrac{1}{n^3}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \dfrac{1}{n^3}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \dfrac{1}{n^3}\cdot\dfrac{1}{6}(n-1)n(2n-1) = \dfrac{1}{6}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left(2-\dfrac{1}{n}\right)$

であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{3}$ である．

数列 $\{S_n\}$，$\{s_n\}$ は長方形の面積の和（下の図の灰色領域）を表している．



放物線 $y = x^2$ と x 軸，直線 $x = 1$ によって囲まれた領域の面積を A とおくと

$$s_n < A < S_n$$

が成り立ち，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{3}$ はこの領域の面積を表している．

5.9　m は メートルを表すとする．はじめは h [m] だけ落下し，以降は he [m]，he^2 [m]，$\cdots$ が往復距離であるから，総移動距離を L とおくと

$$L = h + 2\sum_{n=1}^{\infty} he^n = h + \frac{2he}{1-e} = \frac{1+e}{1-e}h.$$

5.10　点 P が最終的に到達する点の座標を (x, y) とする．

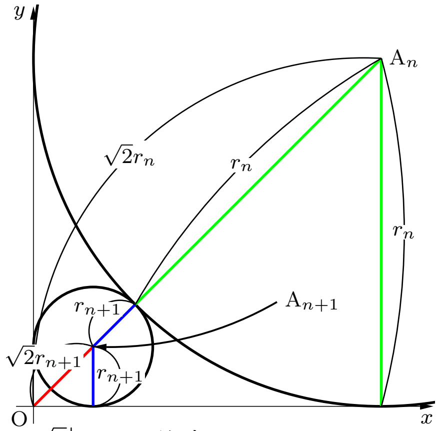
$$x = 0 + 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{1}{1+\frac{1}{4}} = \frac{4}{5},$$

$$y = 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{32} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{2}{5}.$$

したがって，点 P が限りなく近づく点の座標は $\left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{2}{5}\right)$.

5.11　(1)　$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

(2)　円 C_n の中心を A_n，円 C_{n+1} の中心を A_{n+1} とおくと，



$$\begin{aligned}\sqrt{2}r_n = \mathrm{OA}_n &= \mathrm{OA}_{n+1} + r_{n+1} + r_n \\ &= \sqrt{2}r_{n+1} + r_{n+1} + r_n \\ &= \left(\sqrt{2}+1\right) r_{n+1} + r_n.\end{aligned}$$

したがって

$$r_{n+1} = (3-2\sqrt{2})r_n.$$

これは等比数列の漸化式であるから

$$r_n = \left(3-2\sqrt{2}\right)^{n-1}.$$

(3) 面積の総和を S とする．$|r_n^2| = |(3-2\sqrt{2})^2| = \left|17-12\sqrt{2}\right| < 1$ に注意して

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \pi {r_n}^2 = \left(17-12\sqrt{2}\right)^{n-1}\pi = \frac{4+3\sqrt{2}}{8}\pi.$$

5.12 $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} a_n = S_N$ とおく．

$$\begin{array}{rrcccccccccccc} & S_n & = & 1\cdot\frac{1}{2} & + & 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 & + & 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 & + & \cdots & + & n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n & & \\ -) & \frac{1}{2}S_n & = & & & 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 & + & 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 & + & \cdots & + & (n-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n & + & n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ \hline & \frac{1}{2}S_n & = & \frac{1}{2} & + & \left(\frac{1}{2}\right)^2 & + & \left(\frac{1}{2}\right)^3 & + & \cdots & + & \left(\frac{1}{2}\right)^n & - & n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\end{array}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}S_n &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k - n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}} - n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ &= 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n - n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\end{aligned}$$

よって

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = S_N = 2-\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1} - a_N \longrightarrow 2 \quad (N\to\infty).$$

5.13 (1)

$$0 \leqq \sum_{n=1}^{\infty}(x_n+ty_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(x_n^2+2tx_ny_n+t^2y_n^2) = t^2\sum_{n=1}^{\infty}y_n^2 + 2t\sum_{n=1}^{\infty}x_ny_n + \sum_{n=1}^{\infty}x_n^2$$

であるから

$$a = \sum_{n=1}^{\infty}y_n^2,\quad b = \sum_{n=1}^{\infty}x_ny_n,\quad c = \sum_{n=1}^{\infty}x_n^2$$

とおいて，t についての 2 次式 $y = at^2+2bt+c \quad (a, c \geqq 0)$ がどのような t に対しても $y \geqq 0$ となるような条件を調べる．$a = 0$ のときはすべての n に対して $x_n = 0$ となるから，$0 \leqq 0$ となって示す不等式は成立していることが判る． $a \neq 0$ のとき，$y = ax^2+2bx+c$ は下に凸な放物線

であるから，放物線が x 軸に接するか，または x 軸より上側にあれば条件 $y \geqq 0$ を満たす．したがって判別式 $D \leqq 0$ を考えればよい;

$$0 \geqq D/4 = b^2 - ac \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n\right)^2 = b^2 \leqq ac = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2\right).$$

(2) $x_n = 1/\sqrt{n(n+1)},\ y_n = 1/2^n$ とおく．

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{3}$$

よりどちらも収束している．また，$x_n y_n \geqq 0$ であるから，Cauchy-schwarz の不等式より

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \leqq \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2\right)} = \sqrt{1 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

5.14 (1) $x^{2n-1} = x \cdot (x^2)^{n-1}$ は初項 x，公比 x^2 の等比数列で，

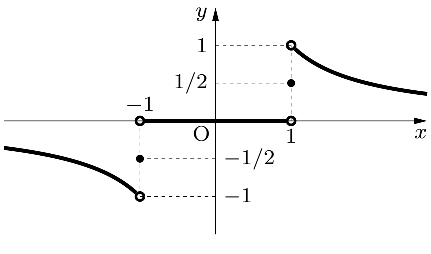
$$\lim_{n\to\infty} x^{2n-1} = \begin{cases} 0 & (-1 < x < 1) \\ 1 & (x = 1) \\ -1 & (x = -1) \\ \infty & (1 < x) \\ -\infty & (x < -1) \end{cases}$$

であり，また $x < -1,\ 1 < x$ のとき

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n-1}}{1 + x \cdot x^{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\dfrac{1}{x^{2n-1}} + x} = \frac{1}{x}$$

であるから

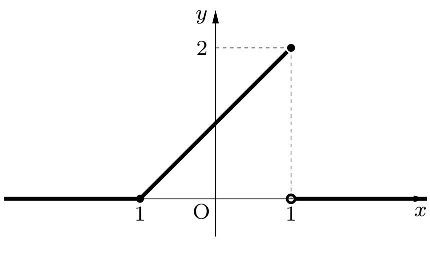
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n-1}}{1 + x \cdot x^{2n-1}} = \begin{cases} 0 & (-1 < x < 1) \\ \dfrac{1}{2} & (x = 1) \\ -\dfrac{1}{2} & (x = -1) \\ \dfrac{1}{x} & (x < -1, 1 < x) \end{cases}$$



グラフは右図のとおり．

(2) (1) と同様に場合分けすると

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}} = \begin{cases} 1 + x & (-1 < x < 1) \\ 1 & (x = 1) \\ 0 & (x \leqq -1, 1 < x) \end{cases}$$



グラフは右図のとおり．

5.15 (1) 与えられた不等式を用いると

$$1+\frac{1}{n+1}=\frac{n+2}{n+1}=\frac{1+n\cdot\dfrac{n+1}{n}}{n+1} \geqq \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

が成り立つ．両辺を $(n+1)$ 乗して

$$a_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \geqq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = a_n.$$

(2)

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+{}_n\mathrm{C}_1\frac{1}{n}+{}_n\mathrm{C}_2\frac{1}{n^2}+{}_n\mathrm{C}_3\frac{1}{n^3}+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\frac{1}{n^n} \\ &= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \\ &\leqq 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} \\ &\leqq 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 3 \end{aligned}$$

(1) の結果と併せて

$$2=a_1 \leqq a_n \leqq 3.$$

〈6 章〉

6.1 (1) $\dfrac{3}{2}$　(2) 4　(3) n　(4) 0　(5) ∞

(6) -1　(7) 5　(8) ∞　(9) ∞

6.2 (1)

$$\frac{|x|}{x} \longrightarrow \begin{cases} 1 & (x \to +0) \\ -1 & (x \to -0) \end{cases}$$

であるから，右側極限と左側極限が一致しない．したがってこの極限は存在しない．

(2)

$$\frac{1}{x-3} \longrightarrow \begin{cases} +\infty & (x \to 3+0) \\ -\infty & (x \to 3-0) \end{cases}$$

であるから，右側極限と左側極限が一致しない．したがってこの極限は存在しない．

(3)

$$\frac{1-\cos^2 x}{\cos x}=\frac{\sin^2 x}{\cos x}=\sin x\tan x \longrightarrow \begin{cases} -\infty & (x \to \frac{\pi}{2}+0) \\ +\infty & (x \to \frac{\pi}{2}-0) \end{cases}$$

であるから，右側極限と左側極限が一致しない．したがってこの極限は存在しない．

6.3 (1) 分母の極限は 0 である．一方で左辺の極限全体は収束しているから，分子の極限も 0 となる．したがって

$$0=\lim_{x\to 3}(ax+2b)=3a+2b \quad\Longleftrightarrow\quad b=-\frac{3}{2}a.$$

ゆえに，与えられた極限は

$$2 = \lim_{x\to 3} \frac{ax+2b}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{ax-3a}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{a(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} a = a.$$

以上より，$a=2,\ b=-3$.

(2) 分母の極限は 0 である．一方で左辺の極限全体は収束しているから，分子の極限も 0 となる．したがって

$$0 = \lim_{x\to 4}(a\sqrt{x}+\sqrt{b}) = 2a+\sqrt{b} \quad\Longleftrightarrow\quad \sqrt{b} = -2a.$$

ここで，上の 2 つ目の式は左辺が負でないから，$a \leqq 0$ が成り立つことに注意する．与えられた極限は

$$\begin{aligned}-1 &= \lim_{x\to 4} \frac{a\sqrt{x}+\sqrt{b}}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{a\sqrt{x}-2a}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{a\left(\sqrt{x}-2\right)}{x-4}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} \\ &= \lim_{x\to 4} \frac{a(x-4)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \frac{a}{2+2} = \frac{a}{4}.\end{aligned}$$

以上より，$a=-4,\ b=64$.

(3) 分母の極限は 0 である．一方で左辺の極限全体は収束しているから，分子の極限も 0 となる．したがって

$$0 = \lim_{x\to 1}(x^2+ax+b) = 1+a+b \quad\Longleftrightarrow\quad b=-a-1.$$

ゆえに，与えられた極限は

$$\begin{aligned}-2a-2 = 2b &= \lim_{x\to 1} \frac{x^2+ax+b}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+ax-a-1}{x^2-1} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+a+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+a+1}{x+1} = \frac{a+2}{2}.\end{aligned}$$

以上より，$a=-\dfrac{6}{5},\ b=\dfrac{1}{5}$.

6.4 (1) 1　(2) 1　(3) 0　(4) $-\log_3 2$

6.5 (1) $\dfrac{2}{3}$　(2) $\dfrac{1}{5}$　(3) 2　(4) $\dfrac{1}{2}$　(5) -1　(6) $\dfrac{\pi}{180}$

6.6 (1) $S_n = \dfrac{1}{2}r^2\sin\dfrac{2\pi}{n} = r^2\sin\dfrac{\pi}{n}\cos\dfrac{\pi}{n}$.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nS_n = \pi r^2$.

6.7 (1) 積和の公式より $2\sin 2k\theta\sin\theta = cos(2k-1)\theta - \cos(2k+1)\theta$ が成り立つ．ゆえに

$$\begin{aligned}2\sin\theta\sum_{k=1}^{n}\sin 2k\theta &= \sum_{k=1}^{n}\left\{\cos(2k-1)\theta - \cos(2k+1)\theta\right\} \\ &= (\cos\theta-\cos 3\theta)+(\cos 3\theta-\cos 5\theta)+\cdots+(\cos(2n-1)\theta-\cos(2n+1)\theta) \\ &= \cos\theta-\cos(2n+1)\theta.\end{aligned}$$

(2) $\cos(\pi + x) = -\cos x$ に注意すれば，和積の公式より

$$\cos\theta - \cos(2n+1)\theta = \cos\theta + \cos\big((2n+1)\theta + \pi\big)$$
$$= 2\cos\frac{2n+2\theta+\pi}{2}\cos\frac{-2n\theta-\pi}{2} = 2\sin(n+1)\theta\sin n\theta$$

が成り立つ．ただし，最後の等号は $\cos(x + \pi/2) = -\sin x$ を用いた．この結果 (1) の等式より，$\sin\theta \neq 0$ に注意して求める結果を得る．

(3) $\theta = \pi/2n$ とすると

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n} = \frac{\cos\frac{2\pi}{n}}{n\sin\frac{2\pi}{n}} \longrightarrow \frac{2}{\pi} \quad (n \to \infty).$$

6.8 (1) n を整数とするとき

$$f(x) = nx \quad (n \leqq x < n+1)$$

であるから，不連続な点は $x = -1,\ 1,\ 2,\ 3.$

(2)

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}} = \begin{cases} 1+x & (-1 < x < 1) \\ 1 & (x = 1) \\ 0 & (x \leqq -1,\ 1 < x) \end{cases}$$

であるから，不連続な点は $x = 1$.

6.9 (1) $f(x) = 2^x - 3x$ とおく．$f(x)$ は $-1 \leqq x \leqq 1$ において連続である．また，$f(-1) = \dfrac{7}{2} > 0$, $f(1) = -1 < 0$ であるから，中間値の定理より，$f(c) = 0,\ -1 < c < 1$ を満たすような実数 c が存在する．この c は題意を満たす．

(2) $f(x) = 2\cos(\pi x) - 2^x$ とおく．$f(x)$ は $0 \leqq x \leqq 1$ において連続である．また，$f(0) = 1 > 0$, $f(1) = -4 < 0$ であるから，中間値の定理より，$f(c) = 0,\ 0 < c < 1$ を満たすような実数 c が存在する．この c は題意を満たす．

6.10 (1) $g(x) = f(x) - \sqrt{2}$ とおく．$f(x)$ が連続であるから $g(x)$ も連続で，

$$g(-1) = -3 - \sqrt{2} < 0, \quad g(0) = 2 - \sqrt{2} > 0, \quad (1) = -1 - \sqrt{2} < 0$$

であるから，中間値の定理より $g(x) = 0$ は $-1 \leqq x \leqq 0,\ 0 \leqq x \leqq 1$ にそれぞれ少なくとも 1 つの解をもつ．

(2) $h(x) = f(x) - 2n - \sqrt{2}$ とおく．$f(x)$ が連続であるから $h(x)$ も連続で，

$$h(2n) = f(2n) - 2n - \sqrt{2} = 2 - \sqrt{2} > 0, \quad h(2n+1) = f(2n+1) - 2n - \sqrt{2} = -1 - \sqrt{2} < 0$$

であるから，中間値の定理より，$h(x)$ は $2n \leqq x \leqq 2n+1$ に少なくとも 1 つ実数解をもつ．

(3) $n \to \infty$ の極限を調べるから $n \geqq 2$ として考えてよい．(2) の解 x_n の存在範囲より

$$2n \leqq x_n \leqq 2n+1 \quad \text{であるから} \quad 2 \leqq \frac{x_n}{n} \leqq 2 + \frac{1}{n}$$

が成り立つ．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ であるから，はさみうちの原理より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n} = 2$.

〈7 章〉

7.1 (1)

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{x+h}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{h\sqrt{x(x+h)}}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+h}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+h}} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x-x-h}{h\sqrt{x(x+h)}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{\sqrt{x(x+h)}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{x^2}\cdot 2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}.
\end{aligned}
$$

(3)

$$
f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x-(x+h)}{hx(x+h)} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}.
$$

7.2 (1)

$$
\frac{|0+h|-|0|}{h} = \frac{|h|}{h} \longrightarrow \begin{cases} 1 & (h\to +0) \\ -1 & (h\to -0) \end{cases}
$$

より，$h\to 0$ のときの極限が存在しないから，微分不可能である．

(2) 定義域は $x \geqq 0$ であるから，$\displaystyle\lim_{h\to -0}\frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h} = \lim_{h\to -0}\frac{\sqrt{h}}{h}$ は存在しない．ゆえに $h\to 0$ のときの極限が存在せず，微分不可能である．

(3)

$$
\lim_{x\to +0}[x] = 0, \quad \lim_{x\to -0}[x] = -1
$$

であるから，極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}[x]$ は存在しない．ゆえに $f(x)=[x]$ は $x=0$ で連続ではない．したがって微分不可能．

7.3 (1)

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a+2h)}{h} &= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - \frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\cdot 2\right\} \\
&= f'(a)-2f'(a) = -f'(a).
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a-2h)}{h} &= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\cdot 2 + \frac{f(a-2h)-f(a)}{-2h}\cdot 2\right\} \\
&= 2f'(a)+2f'(a) = 4f'(a).
\end{aligned}
$$

7.4 (1) $y' = 5x^4$ (2) $y' = -2x+1$ (3) $y' = 42x^6 + 24x^2$ (4) $y' = 0$

(5) $y' = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$ (6) $y' = \dfrac{5\sqrt[3]{x^2}}{3}$ (7) $y' = -\dfrac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$ (8) $y' = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

(9) $y' = -\dfrac{1}{2x^3}$ (10) $y' = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{2x^3}$ (11) $y' = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^4}$ (12) $y' = -\dfrac{3}{2x^2\sqrt{x}}$

7.5 (1) $y' = 4x^3$ (2) $y' = 5x^4 + 3x^2 + 2x$ (3) $y' = 3x^2 + 6x + 2$

(4) $y' = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$ (5) $y' = -\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$ (6) $y' = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

7.6 (1) $y' = 3(x-3)^2$ (2) $y' = 8x(x^2+5)^3$ (3) $y' = 3x(x-2)$

(4) $y' = \dfrac{-6x}{(x^2+1)^4}$ (5) $y' = \dfrac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$

(6) $y' = 4\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^3$

7.7 (1) $t = -x$ とおく．$x \to \infty$ のとき $t \to -\infty$ であるから

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to-\infty}\left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t\to-\infty}\left\{\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right\}^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

(2) $x = 2t$ とおく．$x \to \infty$ のとき $t \to \infty$ であるから

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{t\to\infty}\left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t\to\infty}\left\{\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right\}^2 = e^2.$$

(3) $3x = 1/t$ とおく．$1/x = 3t$ であり，また $x \to 0$ のとき $t \to \infty$ または $t \to -\infty$ であるから

$$\lim_{x\to0}(1+3x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to\pm\infty}\left(1 + \frac{1}{t}\right)^{3t} = e^3.$$

(4)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x} = \frac{1}{e}.$$

7.8 (1) $y' = 3x^2(1 + \tan^2 x^3)$ (2) $y' = 4\cos 4x$ (3) $y' = -4\sin x\cos^3 x$

(4) $y' = \pi\cos(2\pi x)$ (5) $y' = \dfrac{1}{x}$ (6) $y' = \dfrac{x}{(x^2+1)\log 2}$

(7) $y' = \dfrac{(x-3)\log|x-3| + x}{(x-3)\log 2}$ (8) $y' = \dfrac{4(\log x)^3}{x}$ (9) $y' = -2xe^{-x^2}$

(10) $y' = 2\cdot 9^{x+1}\log 3$ (11) $y' = (1+x)e^x$ (12) $y' = 2^x\left(\log x + \dfrac{1}{x\log 2}\right)$

(13) $y' = -\sin x\cos(\cos x)$ (14) $y' = -\dfrac{1}{2\tan x}$ (15) $y' = -\sin x\ e^{\cos x}$

(16) $y' = \dfrac{\cos\log x}{x}$ (17) $y' = \dfrac{-e^x}{2(1+e^x)\sqrt{1+e^x}}$ (18) $y' = 3^{\tan x}\log 3(1 + \tan^2 x)$

(19) $y' = \dfrac{2e^x}{e^{2x}-1}$ (20) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

7.9 (1) $y' = x^x(\log x + 1)$ (2) $y' = 2x^{\log x - 1}\log x$

(3) $y' = x^{\tan x}\left(\dfrac{\log x}{\cos^2 x} + \dfrac{\tan x}{x}\right)$ (4) $y' = (\log x)^x\left(\log(\log x) + \dfrac{1}{\log x}\right)$

(5) $y' = (x+2)(x+3)^2(x+4)^3(9x^2+52x+72)$ (6) $y' = -\dfrac{(x+1)(5x^2+14x+5)}{(x+2)^4(x+3)^5}$

7.10 (1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{y}$ (2) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x^2}{y^2}$ (3) $\dfrac{dy}{dx} = -\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ (4) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{2x}$

7.11 (1) $\dfrac{dy}{dx} = 2t^2$ (2) $\dfrac{dy}{dx} = -2\sin t$ (3) $\dfrac{dy}{dx} = -\tan t$ (4) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sin t}{1-\cos t}$

7.12 (1) $f(x) = \log x$ とおく．$f(1) = 0,\ f'(x) = \dfrac{1}{x}$ であるから，$x = 1$ における微分係数の定義より

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = \frac{1}{1} = 1.$$

(2) $f(x) = \sin^3 x$ とおく．$f'(x) = 3\sin^2 x\cos x$ であるから，$x = a$ における微分係数の定義より

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin^3 x - \sin^3 a}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) = 3\sin^2 a\cos a.$$

(3) $f(x) = e^x$ とおく．$f'(x) = e^x$ であるから，$x = \log a$ における微分係数の定義より

$$\lim_{x\to\log a}\frac{e^x - a}{\log x - a} = \lim_{x\to\log a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) = e^{\log a} = a.$$

7.13 (1) $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ (2) $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ (3) $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n}{n!x^{n+1}}$

(4) $f^{(n)}(x) = a^n e^{ax}$ (5) $f^{(n)}(x) = a^x(\log a)^n$

7.14 $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ であるから，$P(x)$ を 2 次式 $(x-1)^2$ で割ったときの余りは 1 次式または定数で，$ax+b$ とおける．商を $Q(x)$ として

$$x^{11} - 2x^8 - x + 6 = (x-1)^2 Q(x) + ax + b \qquad (\heartsuit)$$

が成り立つ．また，$(\heartsuit)$ の両辺を x について微分すると

$$11x^{10} - 16x^7 - 1 = 2(x-1)Q(x) + (x-1)^2 Q'(x) + a \qquad (\clubsuit)$$

を得る．$(\heartsuit)$，$(\clubsuit)$ にそれぞれ $x = 1$ を代入すれば

$$4 = a + b, \quad -6 = a$$

を得るから，$a = -6,\ b = 10$．したがって余りは $-6x + 10$.

7.15

$$\frac{dx}{dy} = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$$

であるから，逆関数の微分公式より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{1+x^2}.$$

〈8 章〉

8.1 (1)　接: $y = x + 1$，法: $y = -x + 1$

(2)　接: $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x + \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}\pi}{8}$，法: $y = -\sqrt{2}x + \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}\pi}{4}$

(3)　接: $y = -\dfrac{2}{3}x + 4$，法: $y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{5}{2}$　　(4)　接: $y = \dfrac{1}{2}x + 1$，法: $y = -2x + 1$

(5)　接: $y = \dfrac{1}{e}x$，法: $y = -ex + e^2 + 1$　　(6)　接: $y = 1$，法: $x = 0$

8.2 (1)　接: $y = -x + 2\sqrt[3]{2}$，法: $y = x$　　(2)　接: $y = -\dfrac{1}{2}x + 3$，法: $y = 2x - 7$

(3)　接: $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$，法: $y = 2x - 1$

8.3 (1)　接: $y = -x + \dfrac{1}{2}$，法: $y = x - \dfrac{1}{2}$　　(2)　接: $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$，法: $y = 2x - 1$

(3)　接: $y = x - \dfrac{\pi^2}{2} + 2\pi$，法: $y = -x + \dfrac{\pi^2}{2}$

8.4 (1)　$(0, 0)$　　(2)　$(0, 1)$，$\left(\dfrac{\pi}{2}, -1\right)$

8.5 (1)　$y = \dfrac{1}{e}x + 1 - \dfrac{1}{e}$　　(2)　$y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$　　(3)　$y = -x + 2$

8.6　2 つの曲線をそれぞれ $y = f(x)$，$y = g(x)$ とおく．また，接点の x 座標を t とすると，2 つの曲線は $x = t$ で共通接線をもつから

$$k - \cos 2t = f(t) = g(t) = 2\sin t, \quad 2\sin 2t = f'(t) = g'(t) = 2\cos t$$

が成り立つ．ここで，2 つ目の式から

$$2\cos t(2\sin t - 1) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad = \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}$$

である．それぞれの値を 1 つ目の式に代入して

$$k = 1,\ -3,\ \frac{3}{2}.$$

8.7　(1)　$f(x) = \log x$ とおく．$a > 0$ より $f(x)$ は $1 \leqq x \leqq a + 1$ で連続かつ微分可能であるから，平均値の定理より

$$\frac{\log(a+1)}{a} = \frac{\log(a+1) - \log 1}{(a+1) - 1} = \frac{f(a+1) - f(1)}{(a+1) - 1} = f'(c) = \frac{1}{c} \quad (1 < c < a + 1)$$

を満たす実数 c が存在する．いま，$\dfrac{1}{a+1} < \dfrac{1}{c} < 1$ であるから，$a > 0$ のとき

$$\frac{1}{a+1} < \frac{\log(a+1)}{a} < 1.$$

(2) $f(x) = \log x$ とおく．$a > 0$ より $f(x)$ は $a \leqq x \leqq a+1$ で連続かつ微分可能であるから，平均値の定理より

$$\log(a+1) - \log a = \frac{\log(a+1) - \log a}{(a+1) - a} = \frac{f(a+1) - f(a)}{(a+1) - a} = f'(c) = \frac{1}{c} \quad (a < c < a+1)$$

を満たす実数 c が存在する．いま，$\dfrac{1}{a+1} < c < \dfrac{1}{a}$ であるから，$a > 0$ のとき

$$\frac{1}{a+1} < \log(a+1) - \log a < \frac{1}{a}.$$

8.8 (1) $f(t) = e^t$ とおく．$f(t)$ はすべての実数で連続かつ微分可能であるから，平均値の定理より

$$\frac{e^{2x} - e^x}{x} = \frac{f(2x) - f(x)}{2x - x} = f'(c) = e^c \quad (x < c < 2x \text{ または } 2x < c < x)$$

を満たす実数 c が存在する．ここで，$x \to 0$ のとき $c \to 0$ であるから

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x} = \lim_{c \to 0} e^c = e^0 = 1.$$

(2) $f(t) = e^t$ とおく．$f(t)$ はすべての実数で連続かつ微分可能であるから，平均値の定理より

$$\frac{e^{\sin x} - e^x}{x - \sin x} = -\frac{f(\sin x) - f(x)}{\sin x - x} = f'(c) = e^c \quad (\sin x < c < x \text{ または } x < c < \sin x)$$

を満たす実数 c が存在する．ここで，$x \to 0$ のとき $c \to 0$ であるから

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{x - \sin x} = \lim_{c \to 0} -e^c = -e^0 = -1.$$

(3) $f(t) = \log t$ とおく．$f(t)$ すべての正の実数で連続かつ微分可能であるから，平均値の定理より

$$\frac{\log(x+2) - \log x}{2} = \frac{\log(x+2) - \log x}{(x+2) - x} = \frac{f(x+2) - f(x)}{(x+2) - x} = f'(c) = \frac{1}{c} \quad (x < c < x+2)$$

を満たす実数 c が存在する．いま，$\dfrac{1}{x+2} < \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{x}$ であるから

$$\frac{1}{x+2} < \frac{\log(x+2) - \log x}{2} < \frac{1}{x}$$

が成り立つ．ここで，不等式の全辺を $2x$ 倍すると

$$\frac{2x}{x+2} < x\{\log(x+2) - \log x\} < 2$$

を得る．$\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{2x}{x+2} = 2$ であるから，はさみうちの原理より

$$\lim_{x \to \infty} x\{\log(x+2) - \log x\} = 2.$$

8.9 (1) $x = -1$ で極小値 $-1/e$.　　(2) $x = 0$ で極大値 -1.

(3)　$x=\pi/6,\ 5\pi/6$ で極大値 $3/2$，$x=\pi/2$ で極小値 1，$x=3\pi/2$ で極小値 -3.

(4)　$x=\pi/2$ で極大値 $\sqrt{e^\pi}$，$x=3\pi/2$ で極小値 $-e^\pi\sqrt{e^\pi}$.

(5)　$x=0,\ 2$ で極小値 0.　　(6)　$x=0$ で極小値 0.

8.10 (1)　$y'=\dfrac{x^2+2x+a}{(x+1)^2}$ である．y が極値をもつためには，$y'=0$ となるような x の前後で y' の符号が変化していなければならない．y' の分母はつねに非負であるから，符号の変化は分子のみに着目して考えれば良い．分子は 2 次関数であるから，方程式 $x^2+2x+a=0$ が異なる 2 つの実数解を持てば条件を満たす．したがって判別式を用いて $D=2^2-4\cdot1\cdot a>0$．よって $a<1$.

(2)　$y'=\cos x+a$ は連続である．$a\geqq 1$ のときは $y'\geqq 0$，$a\leqq -1$ のときは $y'\leqq 0$ であるから，求める範囲は $-1<a<1$.

8.11 (1)　$x=3$ で最大値 3，$x=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ で最小値 $-3\sqrt{2}$.

極値の候補である x の値は，方程式 $\sqrt{9-x^2}+x=0\quad(x<0)$ から得られる．ゆえにこの方程式の解 $x=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ を代入したときの y の値について

$$y=x-\sqrt{9-x^2}=x+x=2x$$

であることを利用すると，計算が簡単である．

(2)　$x=-1+\sqrt{2}$ で最大値 $-2\sqrt{2}$，$x=-1-\sqrt{2}$ で最大値 $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$.

$y'=-\dfrac{x^2+2x-1}{(x^2+1)^2}$ であるから，$x=-1\pm\sqrt{2}$ が極値の候補である．$x=0$ の値などを参考にすれば増減表も書くことができるが，このときの y の値を求めるときは次のような工夫を考えると良い; 方程式 $x^2+2x-1=0$ の解を α とすると，$\alpha^2+2\alpha-1=0$ が成り立つ．ゆえに $\alpha^2=1-2\alpha$ であるから

$$\frac{\alpha+1}{\alpha^2+1}=\frac{\alpha}{1-2\alpha+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\alpha}{1-\alpha}$$

である．ここに $\alpha=-1\pm\sqrt{2}$ をそれぞれ代入すれば，関数の値を得られる．

(3)　$x=0$ で最小値 0.

8.12 (a)　長方形の対角線の長さは 2 である．よって 1 つの辺を x とすると，周の長さは

$$L(x)=2\left(x+\sqrt{4-x^2}\right).$$

(b)　長方形の対角線の長さは 2 である．よって直角三角形の鋭角の 1 つを θ とすると，周の長さは

$$L(\theta)=2(2\sin\theta+2\cos\theta)=4\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\quad\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right).$$

以下，x あるいは θ について増減表を用いて最大値を求めると，最大値は正方形になるとき，$4\sqrt{2}$.

8.13　底面の正三角形の 1 辺を x，高さを h とおくと，体積を V，表面積を S とするとき

$$\frac{3\sqrt{3}}{4} = V = \frac{1}{2}x^2 \sin 60^\circ h, \quad S = 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 \sin 60^\circ + 3xh$$

が成り立つ．2 つの式から h を消去して

$$S = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{9}{x} \quad (x > 0).$$

増減表を書くと，$x = \sqrt{3}$ のとき 最小値 $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$.

8.14　点 P の座標を (t, t^2) とおく．2 点間の距離の公式より

$$\mathrm{AP} = \sqrt{(3-t)^2 + (t^2)^2} = \sqrt{t^4 + t^2 - 6t + 9}$$

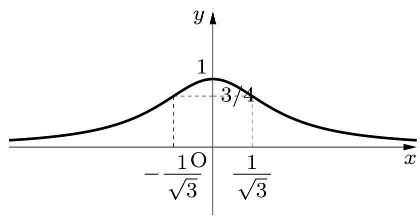
である．$f(t) = t^4 + t^2 - 6t + 9$ とおくと，増減表より $f(t)$ は $t = 1$ で最小値 5 をとる．ゆえに AP の最小値は $\sqrt{5}$.

8.15　(1)

$$y' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2},\ y'' = \frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3},\ \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

より増減表とグラフは以下のとおり．

x	$\cdots$	$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	$\dfrac{3}{4}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\dfrac{3}{4}$	$\searrow$

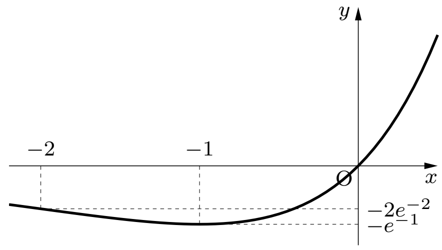


(2)

$$y' = (x+1)e^x,\ y'' = (x+2)e^x,\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

より増減表とグラフは以下のとおり．

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	$\searrow$	$-2e^{-2}$	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$

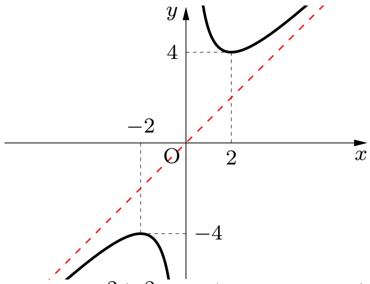


(3)

$$y' = \frac{x^2-4}{x^2},\ y'' = \frac{6}{x^3},\ \lim_{x\to\pm\infty}\{f(x) - x\} = 0,\ \lim_{x\to+0} f(x) = \infty,\ \lim_{x\to-0} f(x) = -\infty$$

より増減表とグラフは以下のとおり．

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$		$+$	$+$	$+$
y	$\nearrow$	-4	$\searrow$		$\searrow$	4	$\nearrow$

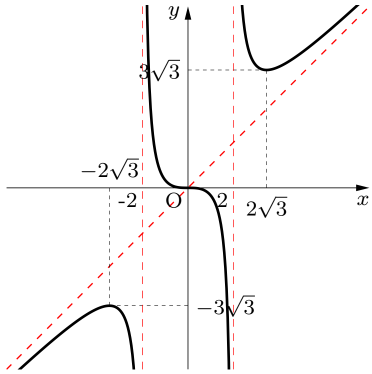


(4) $\dfrac{x^3}{x^2-4} = \dfrac{(x^2-4)x+4x}{x^2-4} = x + \dfrac{4x}{x^2-4}$ に注意して，$y' = \dfrac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$，$y'' = \dfrac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$，

$$\lim_{x\to\pm\infty}\{f(x)-x\} = 0,\ \lim_{x\to 2+0} f(x) = \infty,\ \lim_{x\to 2-0} f(x) = -\infty$$

より増減表とグラフは以下のとおり．

x	$\cdots$	$-2\sqrt{3}$	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	$2\sqrt{3}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$-$		$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	$+$	$+$
y	$\nearrow$	$-3\sqrt{3}$	$\searrow$		$\searrow$	0	$\searrow$		$\searrow$	$3\sqrt{3}$	$\nearrow$

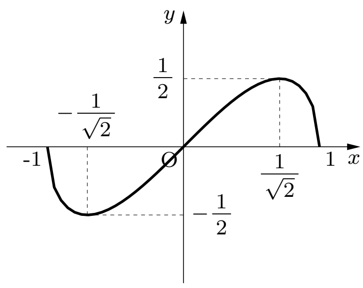


(5)

$$y' = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}},\ y'' = \frac{-x(2x^2+x+2)}{2(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

より増減表とグラフは以下のとおり．

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
y'		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
y''		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
y	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

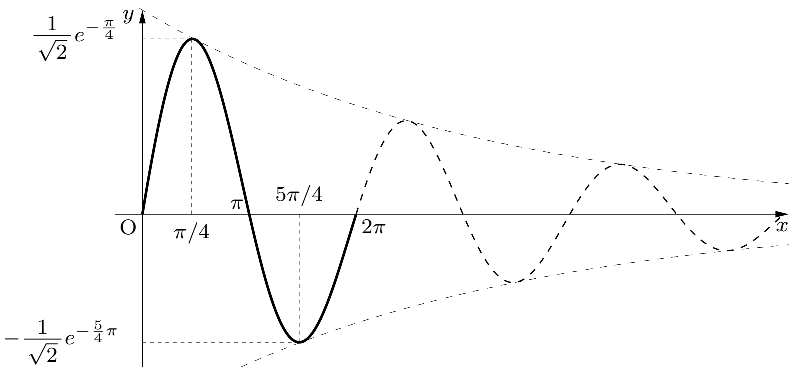


(6) 三角関数の合成を用いて式を整理すると

$$y' = -\sqrt{2}e^{-x}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right),\ y'' = -2e^{-x}\cos x$$

より増減表とグラフは以下のとおり．

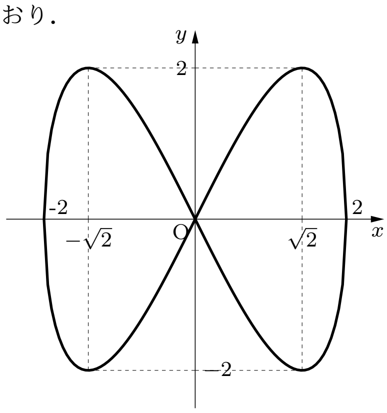
x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
y'	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
y	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}}$	$\searrow$	$e^{-\frac{\pi}{2}}$	$\searrow$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{5}{4}\pi}$	$\nearrow$	$-e^{-\frac{3}{2}\pi}$	$\nearrow$	0



(7) $F(x,y)=y^2-x^2(4-x^2)$ とすると，$F(-x,y)=F(x,y)$, $F(x,-y)=F(x,y)$ が成り立つから，このグラフは x 軸対称かつ y 軸対称である．ゆえに $x \geqq 0,\ y \geqq 0$ で考えればよい．

$$y=x\sqrt{4-x^2}$$

であるから，グラフは以下のとおり．

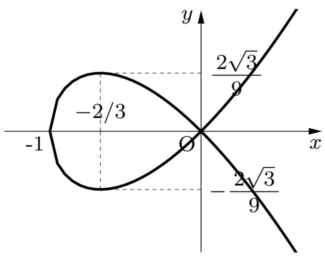


(8) $F(x,y)=y^2-x^2(x+1)$ とおくと，$F(x,-y)=F(x,y)$ が成り立つから，このグラフは x 軸対称である．ゆえに $y \geqq 0$ で考えればよい．

$$y=x\sqrt{x+1},\ y'=\frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}},\ y''=\frac{3x+4}{4(1+x)\sqrt{1+x}}$$

より増減表とグラフは以下のとおり．

x	-1	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y''		$+$	$+$	$+$
y	0	↘	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↗

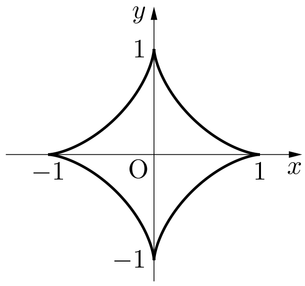


8.16 (1)

$$\frac{dy}{dt}=3\sin^3 t\cos t,\quad \frac{dx}{dt}=-3\cos^3 t\sin t$$

および点 $\left(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ などを通ることに注意して，増減表とグラフは以下のとおり．

t	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\dfrac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$\dfrac{dx}{dt}$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0
x	1	$\leftarrow$	0	$\leftarrow$	-1	$\rightarrow$	0	$\rightarrow$	1
$\dfrac{dy}{dt}$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0
y	0	$\uparrow$	1	$\downarrow$	0	$\downarrow$	-1	$\uparrow$	0



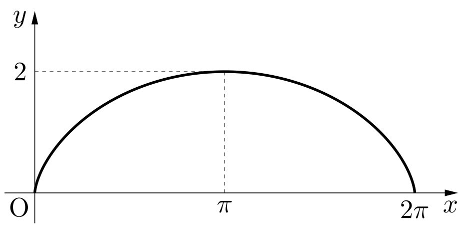
$x(t) = A\sin^3 t,\ y(t) = A\cos^3 t$ の形で表される図形を astroid（星芒形）という．

(2)

$$\frac{dy}{dt} = \sin t, \quad \frac{dx}{dt} = 1 - \cos t$$

より，増減表とグラフは以下のとおり．

t	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$\dfrac{dx}{dt}$	0	$+$	$+$	$+$	0
x	0	$\rightarrow$	π	$\rightarrow$	2π
$\dfrac{dy}{dt}$	0	$+$	0	$-$	0
y	0	$\uparrow$	2	$\downarrow$	0



8.17 (1) $f(x) = x - \sin x$ とおくと，$f'(x) = 1 - \cos x \geqq 0$ である．ゆえに $f(x)$ はつねに増加する．また，$x > 0$ のとき $f(x) > f(0) = 0$ であるから，$x - \sin x > 0$．ゆえに $x > 0$ で $x > \sin x$.

(2) $g(x) = \cos x - 1 + \dfrac{1}{2}x^2$ とおくと，$x > 0$ で $g'(x) = -\sin x + x = f(x) > 0$ である．ゆえに $g(x)$ はつねに増加する．また，$x > 0$ のとき $g(x) > g(0) = 0$ であるから，$\cos x - 1 + \dfrac{1}{2}x^2 > 0$. ゆえに $x > 0$ で $\cos x > 1 - \dfrac{1}{2}x^2$.

(3) $h(x) = \sin x - x + \dfrac{1}{6}x^3$ とおくと，$x > 0$ で $h'(x) = \cos x - 1 + \dfrac{1}{2}x^2 = g(x) > 0$ である．ゆえに $h(x)$ はつねに増加する．また，$x > 0$ のとき $h(x) > h(0) = 0$ であるから，$x > 0$ で $\sin x > x - \dfrac{1}{6}x^3$.

8.18 (1) $f(x) = x - \cos x$ とおく．$f'(x) = 1 + \sin x > 0$ であるから，$f(x)$ はつねに増加する．ゆえに $f(x) = 0$ の実数解は存在すればただひとつである．いま，$f(0) = -1 < 0,\ f(\pi) = \pi + 1 > 0$ であるから，中間値の定理より $f(x) = 0$ は $0 < x < \pi$ の間に少なくとも 1 つ実数解をもつ．したがって $f(x) = 0$ は $0 < x < \pi$ の範囲でただ 1 つの実数解をもつ．

(2) $f(x) = x^3 + 6x - 5$ とおく．$f'(x) = 2x^2 + 6 > 0$ であるから，$f(x)$ はつねに増加する．ゆえに $f(x) = 0$ の実数解は存在すればただひとつである．いま，$f(0) = -5 < 0,\ f(1) = 2 > 0$ であるから，中間値の定理より $f(x) = 0$ は $0 < x < 1$ の間に少なくとも 1 つ実数解をもつ．したがって $f(x) = 0$ は $0 < x < 1$ の範囲でただ 1 つの実数解を持つ．

8.19 (a) $f'(x) = (n + 1 - x)x^n e^{-x}$ より，$f'(x) = 0$ となるのは $x = n + 1 > 0$ のとき．増減表は

x	0	$\cdots$	$n+1$	$\cdots$
y'	0	$+$	0	$-$
y	0	$\nearrow$	$f(n+1)$	$\searrow$

となるから，$f(x) \leqq f(n+1) = \dfrac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}}$ である．また，$x>0$ で $x^{n+1}>0,\ e^x>0$ であるから，$f(x)>0$ である．以上より

$$0 \leqq \frac{x^{n+1}}{e^x} \leqq \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}} \quad (x \geqq 0).$$

(b)　$x>0$ のとき，不等式 (a) の全辺に $1/x$ を掛けると

$$0 \leqq \frac{x^n}{e^x} \leqq \frac{(n+1)^{n+1}}{xe^{n+1}} \quad (x>0)$$

$x \to \infty$ のときの極限を考えると，はさみうちの原理より

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0.$$

8.20　この曲線上の点 (t, te^{-t}) での接線の方程式は，$y' = e^{-x}(1-x)$ より

$$y - te^{-t} = e^{-t}(1-t)(x-t)$$

である．この直線が点 $(r,0)$ を通るから，$e^{-t}>0$ に注意して

$$-te^{-t} = e^{-t}(1-t)(r-t) \quad \Longleftrightarrow \quad t^2 - rt + r = 0$$

である[*25]．得られた t についての 2 次方程式の実数解がちょうど 2 つになればよいので，判別式を用いて

$$0 < D = (-r)^2 - 4\cdot 1\cdot r = r(r-4) \quad \Longleftrightarrow \quad r<0,\ 4<r.$$

8.21　(1)　(a)　$f'(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x} \geqq 0 \quad (x \geqq 1)$ であるから，$f(x)$ は $x \geqq 1$ でつねに増加する．したがって $f(x) \geqq f(1) = 2$ であるから，$2\sqrt{x} \geqq 2 + \log x$．また，$x \geqq 1$ で $\log x \geqq 0$ であるから

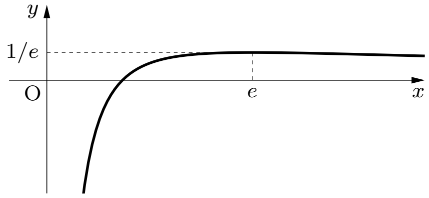
$$0 \leqq \log x < 2 + \log x \leqq 2\sqrt{x}.$$

(b)　不等式 (a) の両辺に $1/x$ を掛けて x についての極限をとると，はさみうちの原理より

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0.$$

(2)　$g'(x) = \dfrac{1-\log x}{x^2}$，$g''(x) = \dfrac{\log x^2 - 3}{x^3}$ である．また，(1)(b) の極限に注意して，増減表とグラフは

x	1	$\cdots$	e	$\cdots$	$e\sqrt{e}$	$\cdots$
y'	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y	0	↗	$\dfrac{1}{e}$	↘	$\dfrac{3}{2e\sqrt{e}}$	↘



[*25] $r = \dfrac{t^2}{t-1}$ のグラフを描いて，実数解が 2 つとなるような r の値の範囲を求めてもよい．

(3)　(イ)　$1 \leqq x \leqq e$ の範囲では，$f(x)$ は増加する．ゆえに $f(2) < f(e)$ であるから

$$f(2) < f(e) \iff \frac{\log 2}{2} < \frac{\log e}{e} \iff e\log 2 < 2\log e \iff \log 2^e < \log e^2 \iff 2^e < e^2.$$

(ロ)　$e \leqq x$ の範囲では，$f(x)$ は減少する．ゆえに $f(3) > f(\pi)$ である．

$$f(3) > f(\pi) \iff \frac{\log 3}{3} > \frac{\log \pi}{\pi} \iff \pi\log 3 > 3\log \pi \iff \log 3^\pi > \log \pi^3 \iff 3^\pi > \pi^3.$$

(ハ)　同様にして，$e^\pi > \pi^e$.

8.22　$f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$ とおく．微分して増減を調べると，$x > 0$ において，$x = 2$ で最小値 $\dfrac{e^2}{4}$ をとる．与えられた不等式は $f(x) \geqq a$ と表せるから，a が $f(x)$ の最小値以下であれば成り立つ．ゆえに $a \leqq \dfrac{e^2}{4}$.

8.23　(1)　問題 21.(1)(b) において $x = 1/t$ とおくと，$x \to \infty$ のとき $t \to +0$ であって

$$0 = \lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{t\to+0} \frac{\log \frac{1}{t}}{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to+0} -t\log t$$

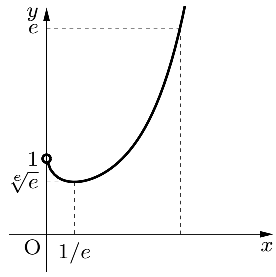
が成り立つ．ゆえに変数を t から x に書き換えて，

$$\lim_{x\to+0} x\log x = (-1)\cdot 0 = 0.$$

(2)　$0 = \lim\limits_{x\to+0} x\log x = \lim\limits_{x\to+0} \log x^x$ より $\lim\limits_{x\to+0} x^x = 1$.

(3)　対数微分法を用いると，$y' = x^x(\log x + 1)$ であるから，(2) の結果と合わせて

x	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{e}$	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y	1(片側極限)	$\searrow$	$\dfrac{1}{\sqrt[e]{e}}$	$\nearrow$



また，$g(x) = f(x) - e$ とおく．$g(1) = 1 - e < 0$, $g(2) = 4 - e > 0$ であるから，中間値の定理より方程式 $f(x) = e$ は $1 < x < 2$ に少なくとも 1 つ実数解をもつ．グラフより，それはただ 1 つである．

8.24 (1)　$\overrightarrow{v} = (v_0 + gt, 0)$, $\overrightarrow{a} = (g, 0)$　　(2)　$\overrightarrow{v} = (A\omega\sin\omega t, 0)$, $\overrightarrow{a} = (-A\omega^2\cos\omega t, 0)$

(3)　$\overrightarrow{v} = (1 - \cos t, \sin t)$, $\overrightarrow{a} = (\sin t, \cos t)$

8.25

$$\overrightarrow{v} = (e^{-t}(\cos t - \sin t), -e^{-t}(\cos t + \sin t)),\ |\overrightarrow{v}| = \sqrt{2}e^{-t},\ |\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = e^{-t},\ \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} = -e^{-2t}$$

であるから

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{v}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|} = \frac{-e^{2t}}{\sqrt{2}e^{-t}e^{-t}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

ゆえになす角は $\theta = 135°$.

〈9 章〉

9.1 (1) $\dfrac{4}{9}\sqrt[4]{x^9}+C$ (2) $\displaystyle\int(1+\tan^2 x)\,dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\tan x+C$

(3) $\dfrac{4^{x+2}}{\log 4}+C$ (4) $\dfrac{2^x e^x}{\log 2+1}+C$

9.2 (1) $\dfrac{1}{9}(x+3)^9+C$ (2) $\dfrac{1}{8\sqrt{4t+1}}+C$ (3) $-\dfrac{1}{2}\cos(2\theta+\pi)+C$

(4) $x+2=t$ とおく．$dt=dx$ で

$$\int x(x+2)^3\,dx=\int(t-2)t^3\,dt=\int(t^4-2t^3)\,dt=\frac{t^4}{10}(2t-5)+C=\frac{(2x-1)(x+2)^5}{10}+C.$$

(5) $t-3=x$ とおく．$dx=dt$ で

$$\int t\sqrt{t-3}\,dt=\int(x+3)\sqrt{x}\,dx=\int(x^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{1}{2}})\,dx=\frac{2}{5}x\sqrt{x}(x+5)+C.$$

(6) $(e^x+3)'=e^x$ より，$\displaystyle\int(e^x+3)^5e^x\,dx=(e^x+3)^6+C.$

(7) $\displaystyle\int(\sin^2 x+\cos^2 x)\,dx=\int dx=x+C.$

(8) $(e^x+e^{-x})'=e^x-e^{-x}$ より，$\displaystyle\int\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx=\log|e^x+e^{-x}|+C=\log(e^x+e^{-x})+C.$

(9) $\log y=x$ とおく．$dx=\dfrac{1}{y}dy$ で

$$\int\frac{1}{y\log y}\,dy=\int x\,dx=\log|x|+C=\log|(\log y)|+C.$$

(10) $(\cos x)'=-\sin x$ より，$\displaystyle\int\sin x\cos^4 x\,dx=-\frac{1}{5}\cos^5 x+C.$

(11) $x^3=t$ とおく．$dt=3x^2\,dx$ で

$$\int x^2e^{x^3}\,dx=\frac{1}{3}\int e^t\,dt=\frac{1}{3}e^t+C=\frac{1}{3}e^{x^3}+C.$$

(12) $t=(y-1)(y+2)=y^2+y-2$ とおく．$dt=(2y+1)\,dy$ で

$$\int(2y+1)e^{(y-1)(y+2)}\,dy=\int e^t\,dt=e^t+C=e^{(y-1)(y+2)}+C.$$

9.3 (1) $-x\cos x+\sin x+C.$

(2) $\displaystyle\int \log(x+3)\,dx = \int (x+3)' \log(x+3)\,dx = (x+3)\log(x+3) - \int dx = (x+3)\log(x+3) - x + C.$

(3) $\displaystyle\int \log(x^2-1)\,dx = \int \log(x+1)\,dx + \int \log(x-1)\,dx = x\log(x^2-1) + \log\frac{x+1}{x-1} - 2x + C.$

(4) $e^{-x}(1-x) + C.$

(5) $\displaystyle\int \log x^x\,dx = \int x\log x\,dx = \int \left(\frac{1}{2}x^2\right)' \log x\,dx = \frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{4}x^2 + C.$

(6) $2x\tan x + 2\log|\cos x| + C.$

(7) $\displaystyle\int (\log x)^2\,dx = \int (x)'(\log x)^2\,dx = x(\log x)^2 - 2\int \log x\,dx = x\{(\log x)^2 - 2\log x + 2\} + C.$

(8) $\displaystyle\int x^2 e^x\,dx = \int (e^x)' x^2\,dx = x^2 e^x - 2\int x e^x\,dx = x^2 e^x - 2\int (e^x)' x\,dx = (x^2 - 2x + 2)e^x + C.$

(9)

$$\int e^{-x}\cos x\,dx = -e^{-x}\cos x + \int -e^{-x}\sin x\,dx = -e^{-x}\cos x + e^{-x}\sin x - \int e^{-x}\cos x\,dx.$$

であるから，右辺の第 3 項を移項して両辺を 1/2 倍すると

$$\int e^{-x}\cos x\,dx = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x) + C = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + C.$$

9.4 (1) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x-1}\,dx = \int \left(x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1}\right)dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + \log|x-1| + C.$

(2) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^2+1}\,dx = \int \left(1 + \frac{x}{x^2+1}\right)dx = x + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C.$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-4}\,dx = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right)dx = \frac{1}{4}\log\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C.$

(4) $\displaystyle\int \frac{x-8}{6(x^2-x-2)}\,dx = -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} = \frac{1}{2}\log|x+1| - \frac{1}{3}\log|x-2| + C.$

9.5 (1) $t = \sin x$ とおく．$dt = \cos x\,dx$ で

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos x}\,dx &= \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,dx = \int \frac{dt}{1-t^2}\\ &= \frac{1}{2}\log\frac{|t+1|}{|t-1|} + C = \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + C.\end{aligned}$$

(2) $t = e^x$ とおく．$dt = e^x\,dx$ で

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x} + 2}\,dx = \int \frac{dt}{t^2+2t+1} = \int \frac{dt}{(t+1)^2} = -\frac{1}{t+1} + C = \frac{1}{e^x+1} + C.$$

(3) $\displaystyle\int \sin 4x \sin 6x\,dx = \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \cos 10x)\,dx = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{20}\sin 10x + C.$

(4) $\displaystyle\int \cos 2x \cos 4x\,dx = \frac{1}{2}\int (\cos 6x + \cos 2x)\,dx = \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\,dx = \int \left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\,dx = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x}} + C.$

(6) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3x+4}-2}\,dx = \int \frac{1}{3}\left(\sqrt{3x+4}+2\right)\,dx = \frac{1}{2\sqrt{3x+4}} + \frac{2}{3}x + C.$

9.6 (1) $F(x) = \displaystyle\int F'(x)\,dx = \int (x+1)e^x\,dx = xe^x + C$．また，$3 = F(0) = C$ であるから，$F(x) = xe^x + 3$.

(2) $F(x) = \displaystyle\int x\log x\,dx = \frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{4}x^2 + C$．また，$1 = F(1) = -\dfrac{1}{4} + C$ であるから，$C = \dfrac{5}{4}$．ゆえに $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2\log x - \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{5}{4}$.

9.7 (1) 等式を示す．三角関数の相互関係の公式より

$$(\text{右辺}) = \tan x + \frac{1}{\tan x} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x\cos x} = \frac{1}{\sin x\cos x} = (\text{左辺}).$$

この等式と置換積分の公式を用いて

$$\int \frac{dx}{\sin x\cos x} = \int \left(\tan x + \frac{1}{\tan x}\right)\,dx = \int \frac{1+\tan^2 x}{\tan x}\,dx = \int \frac{(\tan x)'}{\tan x}\,dx = \log|\tan x| + C.$$

(2) 2 倍角の公式と (1) の不定積分に対する置換積分を用いて

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = 2\cdot\frac{1}{2}\log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.$$

(3) 三角関数の合成と (2) の不定積分に対する置換積分を用いて

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right| + C.$$

(2) の不定積分について，半角の公式

$$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}, \quad \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$$

を用いると

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C = \log\left|\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right| + C = \log\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} + C = \frac{1}{2}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + C$$

を得る．これは問題 5.(1) のように不定積分を求めた場合の結果である．

9.8 (1) 1 (2) 2 (3) 2 (4) $e + 2 - \dfrac{1}{e}$ (5) $\dfrac{3}{10}(3-\sqrt[3]{4})$ (6) $-\dfrac{1}{4}\log 3$

9.9 (1) $\dfrac{341}{5}$ (2) $\log 2$ (3) $\dfrac{e-1}{3}$ (4) $\dfrac{9}{4}\pi$ (5) $\dfrac{\pi}{6}$ (6) $\dfrac{5}{36}\pi$

9.10 (1) $\dfrac{\pi}{2}+1$ (2) $\dfrac{32}{5}\log 2-\dfrac{31}{25}$ (3) $\dfrac{1}{4}$ (4) $\dfrac{7}{30}$

9.11 (1) $f(x)=e^2+2,\ a=-1$ (2) $f(x)=\dfrac{2}{\pi^2}(\sin 2x+x),\ a=\dfrac{2}{\pi^2}$

9.12 (1) $f(x)=\sin^2 x-\dfrac{\pi}{2(\pi-1)}$ (2) $f(x)=x-\dfrac{1}{e-2}$

9.13 (1) $F'(x)=2xe^x+e^x-1$ (2) $F'(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}\sin 2x$

9.14 (1) (i) $m=n$ のとき，半角の公式 $\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$ に注意して

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx&=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx\\&=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2nx}{2}\,dx\\&=\left[\frac{x}{2}-\frac{\sin 2nx}{4n}\right]_{-\pi}^{\pi}\\&=\pi.\end{aligned}$$

(ii) $m\neq n$ のとき，$m-n\neq 0$ に注意すると，積和の公式を用いて

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(mx)\sin nx\,dx&=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(mx-nx)-\cos(mx+nx)}{2}\,dx\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n}-\frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_{-\pi}^{\pi}\\&=0\quad(\because m-n,\ m+n\ \text{はどちらも整数.})\end{aligned}$$

したがって

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=\begin{cases}\pi & (m=n)\\ 0 & (m\neq n)\end{cases}.$$

(2) $\sin mx\cos nx$ は奇関数である．ゆえに

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx\,dx=0.$$

(3) (i) $m=n$ のとき，半角の公式 $\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$ に注意して

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx&=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx\\&=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2nx}{2}\,dx\\&=\left[\frac{x}{2}+\frac{\sin 2nx}{4n}\right]_{-\pi}^{\pi}\\&=\pi.\end{aligned}$$

(ii) $m\neq n$ のとき，$m-n\neq 0$ に注意すると，積和の公式を用いて，

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(mx+nx)+\cos(mx-nx)}{2}\, dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0 \quad (\because m+n,\ m-n \text{ はどちらも整数.})\end{aligned}$$

したがって

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \begin{cases} \pi & (m=n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}.$$

9.15 (1) 0 (2) 0 (3) 0 (4) π

9.16 (1) $\dfrac{1}{2}$ (2) $\dfrac{17}{6}$ (3) $\dfrac{1}{2}\log 2$

9.17 (1) $a_1 = \lim_{h\to 0} \int_0^h e^{-t}\, dt = \lim_{h\to 0}\left[-e^{-t}\right]_0^h = \lim_{h\to 0}(-e^{-h}+1) = 1.$

(2) 部分積分法より

$$\int_0^h t^{n+1}e^{-t}\, dt = \left[-t^{n+1}e^{-t}\right]_0^h + \int_0^h (n+1)t^n e^{-t}\, dt = -h^{n+1}e^{-h} + (n+1)\int_0^h t^n e^{-t}\, dt$$

が成り立つ．$n \to \infty$ の極限をとれば

$$a_{n+1} = \lim_{h\to 0}\int_0^h t^{n+1}e^{-t}\, dt = \lim_{h\to 0}\left(-h^{n+1}e^{-h} + (n+1)\int_0^h t^n e^{-t}\, dt\right) = (n+1)a_n.$$

(3) (2) の漸化式の両辺に $1/(n+1)!$ を掛けると

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a_n}{n!} = \cdots = \frac{a_1}{1!} = 1$$

であるから，$a_n = n!$.

9.18 (1)

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \sum_{k=1}^{n} \log\frac{n+k}{n} = \sum_{k=1}^{n}\bigl(\log(n+k) - \log n\bigr) = \log(n+1)(n+2)\cdots(n+n) - n\log n \\ &= \log\frac{1\cdot 2\cdots n\cdot(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{1\cdot 2\cdots n} - n\log n = \log\frac{(2n)!}{n!} - n\log n \\ &= \log a_n - n\log n = (\text{右辺})\end{aligned}$$

(2) (1) の等式と区分求積法より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log a_n - n\log n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \log(1+x)\, dx = 2\log 2 - 1.$$

(3)　(2) の結果より

$$\lim_{n\to\infty}\log\frac{\sqrt[n]{a_n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\bigl(\log\sqrt[n]{a_n}-\log n\bigr)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\log a_n}{n}-\log n\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\log a_n-n\log n}{n}=2\log 2-1=\log 4-\log e=\log\frac{4}{e}$$

が成り立つ．よって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a_n}}{n}=\frac{4}{e}.$$

9.19

$$0\leqq\int_a^b\bigl\{f(x)+tg(x)\bigr\}^2\,dx=\int_a^b\bigl\{f(x)^2+2tf(x)g(x)+t^2g(x)^2\bigr\}\,dx$$
$$=t^2\int_a^b g(x)^2\,dx+2t\int_a^b f(x)g(x)\,dx+\int_a^b f(x)^2\,dx$$

であるから

$$a=\int_a^b g(x)^2\,dx,\quad b=\int_a^b f(x)g(x)\,dx,\quad c=\int_a^b f(x)^2\,dx$$

とおいて，t についての 2 次式 $y=at^2+2bt+c\quad(a,c\geqq 0)$ がどのような t に対しても $y\geqq 0$ となるような条件を調べる．$a=0$ のときはどのような x に対しても $f(x)=0$ となるから，$0\leqq 0$ となって示す不等式は成立していることが判る． $a\neq 0$ のとき，$y=ax^2+2bx+c$ は下に凸な放物線であるから，放物線が x 軸に接するか，または x 軸より上側にあれば条件 $y\geqq 0$ を満たす．したがって判別式 $D\leqq 0$ を考えればよい;

$$0\geqq D/4=b^2-ac\quad\Longleftrightarrow\quad\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2=b^2\leqq ac=\left(\int_a^b g(x)^2\,dx\right)\left(\int_a^b f(x)^2\,dx\right).$$

9.20　(1)　$a_0=\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$　（$x=\tan t$ と置き換えよ.）

また，$0\leqq x\leqq 1$ のとき $0\leqq\dfrac{1}{x^2+1}\leqq 1$ であるから

$$0\leqq a_n=\int_0^1\frac{x^{2n}}{x^2+1}\,dx\leqq\int_0^1 x^{2n}\,dx=\frac{1}{2n+1}$$

が成り立つ．$n\to\infty$ の極限をとれば，はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0.$

(2)

$$a_{n+1}+a_n=\int_0^1\frac{x^{2n+2}}{x^2+1}\,dx+\int_0^1\frac{x^{2n}}{x^2+1}\,dx=\int_0^1\frac{x^{2n}(1+x^2)}{1+x^2}\,dx=\int_0^1 x^{2n}\,dx=\frac{1}{2n+1}.$$

(3)

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n(a_{n+1}+a_n)$$
$$=(a_1+a_0)-(a_2+a_1)+(a_3+a_2)-\cdots+(-1)^N(a_{N+1}+a_N)=a_0+(-1)^Na_{N+1}$$

が成り立つ．両辺の $N \to \infty$ の極限をとれば

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{N\to\infty} \bigl(a_0 + (-1)^N a_{N+1}\bigr) = a_0 = \frac{\pi}{4}.$$

9.21 (1) $a_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan x\, dx = \Bigl[-\log(\cos x)\Bigr]_0^{\pi/4} = -\log\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\log 2}{2}$. また，

$$\begin{aligned} a_n + a_{n+2} &= \int_0^{\pi/4} \tan^n x\, dx + \int_0^{\pi/4} \tan^{n+2} x\, dx = \int_0^{\pi/4} \tan^n x(1+\tan^2 x)\, dx \\ &= \left[\frac{\tan^{n+1} x}{n+1}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

(2) $0 \leqq x \leqq \pi/4$ のとき $0 \leqq \tan x \leqq 1$ であるから，$a_n \geqq 0$, $a_{n+2} \geqq 0$ である．よって

$$0 \leqq a_n \leqq a_n + a_{n+2} = \frac{1}{n+1}$$

が成り立つ．$n \to \infty$ の極限をとれば，はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(3)

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{2n} = \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1}(a_{2n-1} + a_{2n+1}) \\ &= (a_1 + a_3) - (a_3 + a_5) + \cdots + (-1)^{N-1}(a_{2N-1} + a_{2N+1}) = a_1 + (-1)^{N-1} a_{2N+1} \end{aligned}$$

が成り立つ．両辺を 2 倍して $N \to \infty$ の極限をとれば

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \lim_{N\to\infty} 2\bigl(a_1 + (-1)^{N-1} a_{2N+1}\bigr) = 2a_1 = \log 2.$$

9.22 (1) $a_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan x\, dx = \Bigl[-\log(\cos x)\Bigr]_0^{\pi/4} = \frac{\log 2}{2}$.

また，$0 \leqq x \leqq \pi/4$ のとき $0 \leqq \sin x \leqq 1/\sqrt{2}$, $0 \leqq \tan x \leqq 1$ より

$$0 \leqq a_n = \int_0^{\pi/4} \sin^{2n} x \tan x\, dx \leqq \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n} dx = \frac{\pi}{2^{n+2}}$$

が成り立つ．$n \to \infty$ の極限をとれば，はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(2)

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \int_0^{\pi/4} \sin^{2n+2} \tan x\, dx - \int_0^{\pi/4} \sin^{2n} x \tan x\, dx \\ &= \int_0^{\pi/4} \sin^{2n} x \tan x(\sin^2 x - 1)\, dx = -\int_0^{\pi/4} \cos x \sin^{2n+1} x\, dx \\ &= -\left[\frac{1}{2n+2} \sin^{2n+2} x\right]_0^{\pi/4} = -\frac{1}{2n+2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n+2} = -\frac{1}{(n+1)2^{n+2}}. \end{aligned}$$

(3)

$$\sum_{n=1}^{N} -\frac{1}{n\cdot 2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{N}(a_n - a_{n-1})$$
$$= (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_N - a_{N-1}) = a_N - a_0$$

より，両辺を -2 倍して $n\to\infty$ の極限をとれば

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n} = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n\cdot 2^n} = \lim_{N\to\infty}2(a_0 - a_N) = \log 2.$$

9.23 (1) $a_1 = \dfrac{1}{1!}\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}\,dx = \Big[-xe^{-x}\Big]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,dx = -\frac{1}{e} + \Big[-e^{-x}\Big]_0^1 = -\frac{2}{e} + 1.$

また，$0 \leqq x \leqq 1$ のとき $0 \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq e^{-x} \leqq 1$ であるから

$$0 \leqq a_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 x^n e^{-x}\,dx \leqq \frac{1}{n!}\int_0^1 dx = \frac{1}{n!}$$

が成り立つ．$n\to\infty$ の極限をとれば，はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

(2) 部分積分法により

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\int_0^1 x^{n+1}e^{-x}\,dx = \frac{1}{(n+1)!}\left(\Big[-x^{n+1}e^{-x}\Big]_0^1 + (n+1)\int_0^1 x^n e^{-x}\,dx\right)$$
$$= -\frac{1}{(n+1)!e} + \frac{1}{n!}\int_0^1 x^n e^{-x}\,dx = -\frac{1}{(n+1)!e} + a_n$$

であるから

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{(n+1)!e}.$$

(3) 階差数列の公式より，$n \geqq 2$ のとき

$$a_N = a_1 + \sum_{n=1}^{N-1} -\frac{1}{(n+1)!e} = -\frac{2}{e} + 1 - \sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n!e}$$

が成り立つ．両辺 e 倍して $N\to\infty$ の極限をとり，式を整理すれば

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!} = 2 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!} = e.$$

9.24 (1) $I_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$，$I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx = 1.$

(2)　部分積分法により

$$\begin{aligned}
I_{m+2} &= \int_0^{\pi/2} \sin^{m+2} x\,dx = \int_0^{\pi/2} (-\cos x)' \sin^{m+1} x\,dx \\
&= \Big[-\cos x \sin^{m+1} x\Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (m+1)\cos^2 x \sin^m x\,dx \\
&= (m+1)\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 x)\sin^m x\,dx \\
&= (m+1)\int_0^{\pi/2} \sin^m x\,dx - (m+1)\int_0^{\pi/2} \sin^{m+2} x\,dx \\
&= (m+1)I_m - (m+1)I_{m+2}
\end{aligned}$$

が成り立つ．I_{m+2} を移項して整理すれば，示す等式を得る．

(3)　(1)，(2) の結果より

$$I_5 = \frac{4}{5}I_3 = \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}I_1 = \frac{8}{15}.\quad I_6 = \frac{5}{6}I_4 = \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}I_2 = \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}I_0 = \frac{5}{32}\pi.$$

9.25　$x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n$ の平均を $\overline{x}$，$x_1^2,\ x_2^2,\ \ldots, x_n^2$ の平均を $\overline{x^2}$ とすると

$$V_n = \overline{x^2} - (\overline{x})^2$$

が成り立つ[26]から，区分求積法より

$$\begin{aligned}
V_n &= \overline{x^2} - (\overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin^2\frac{k\pi}{n} - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\right)^2 \\
&\longrightarrow \int_0^1 \sin^2 x\pi\,dx - \left(\int_0^1 \sin x\pi\,dx\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\quad (n\to\infty).
\end{aligned}$$

[26] $V_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2 - 2\overline{x}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k + (\overline{x})^2\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}1 = \overline{x^2} - 2(\overline{x})^2 + (\overline{x})^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2$

A　Gauss 積分と正規分布

Gauss 積分は確率・統計の分野で用いられるが，その値を高校数学の範囲で求めることは難しい．ここでは Wallis 積分を用いた方法で，積分の値について説明を試みる（１００％正しい計算ではないので注意せよ）．

Def A.1（Gauss 関数）

a, b, c を実数とする．関数

$$ae^{-\frac{(x-b)^2}{c^2}}$$

を **Gauss 関数** という．

Gauss 関数の不定積分は一般には求められないが，$a = 1, b = 0, c = 1$ としたときの Gauss 関数に対する次の極限値

$$\lim_{R \to \infty} \int_0^R e^{-x^2}\, dx$$

は[*27]，$\sqrt{\pi}/2$ に収束することが知られている．このような Gauss 関数に関する積分を **Gauss 積分**という．

【Wallis 積分】

Def A.2（Wallis 積分）

$m = 0, 1, 2, \ldots$ に対し

$$I_m = \int_0^{\pi/2} \sin^m x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^m x\, dx$$

を **Wallis 積分** という．

2 つ目の等号が成立することを示す．実際，三角関数の定義より，任意の実数 θ に対し

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$$

が成り立つから，変数変換 $\frac{\pi}{2} - x = t$ によって

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^m \left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \int_{\pi/2}^0 \cos^m t \cdot (-1)\, dt = \int_0^{\pi/2} \cos^m x\, dx$$

である．

[*27] この定積分を

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$$

と表す．

Th A.3

Wallis 積分 I_m に対して，漸化式

$$I_{m+2} = \frac{m+1}{m+2} I_m \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

が成り立つ．

証明　部分積分法を用いれば

$$\begin{aligned} I_{m+2} &= \int_0^{\pi/2} \cos^{m+2} x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos x \cos^{m+1} x\,dx = \int_0^{\pi/2} (\sin x)' \cos^{m+1} x\,dx \\ &= \Big[\sin x \cos^{m+1} x\Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (m+1) \sin^2 x \cos^m x\,dx \\ &= 0 + (m+1) \int_0^{\pi/2} \big(\cos^m x - \cos^{m+2} x\big)\,dx \\ &= (m+1)(I_m - I_{m+2}) = (m+1) I_m - (m+1) I_{m+2} \end{aligned}$$

が成り立つ．ただし，5 つ目の等号は $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ を用いた．最後の I_{m+2} を移項して整理すれば求める式を得る． □

ここで

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}, \qquad I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = 1$$

であるから，Th A.3 の漸化式を繰り返し用いれば，次の結果を得る：

$n = 0, 1, 2, \ldots$ に対し

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, \\ I_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1. \end{aligned}$$

また

$$(2n-1) \cdot (2n-3) \cdots 3 \cdot 1 = \frac{2n \cdot (2n-1) \cdot (2n-2) \cdot (2n-3) \cdots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2n \cdot (2n-2) \cdots 4 \cdot 2} = \frac{(2n)!}{2n \cdot (2n-2) \cdots 4 \cdot 2},$$

$$2n \cdot (2n-2) \cdots 4 \cdot 2 = 2^n \cdot n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 = 2^n \cdot n!$$

が成り立つから，組み合わせの記号 ${}_n\mathrm{C}_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ を用いて

$$\frac{(2n-1) \cdot (2n-3) \cdots 3 \cdot 1}{2n \cdot (2n-2) \cdots 4 \cdot 2} = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n! \cdot 2^n \cdot n!} = \frac{(2n)!}{4^n \cdot n!(2n-n)!} = \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{4^n}$$

と表すことができる．ゆえに先の結果は次の形にまとめられる．

Cor A.4

$n = 0, 1, 2, \ldots$ に対し

$$I_{2n} = \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{4^n} \cdot \frac{\pi}{2}, \qquad I_{2n-1} = \frac{4^n}{{}_{2n}\mathrm{C}_n} \cdot \frac{1}{2n+1}$$

が成り立つ．

続いて，I_n に関する重要な極限の値について議論しよう．

Prop A.5

$\{I_m\}$ は非負単調減少列である．すなわち

$$I_1 \geqq I_2 \geqq \cdots \geqq I_{m-1} \geqq I_m \geqq I_{m+1} \geqq \cdots > 0$$

が成り立つ．

証明　非負性は Cor A.4 より明らかである．単調減少性を示す．$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ において $0 \leqq \sin x \leqq 1$ であるから，

$$\sin^{m+1} x \leqq \sin^m x \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

が成り立つ．ゆえに

$$I_{m+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{m+1} x \, dx \leqq \int_0^{\pi/2} \sin^m x \, dx = I_m \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

である．□

Th A.6（Wallis の公式）

$$\lim_{m \to \infty} \sqrt{m} I_m = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

証明　数列 $\{(m+1)I_{m+1}I_m\}$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ を考える．Th 1.3 より

$$(m+2)I_{m+2}I_{m+1} = (m+2) \cdot \frac{m+1}{m+2} I_m \cdot I_{m+1} = (m+1)I_{m+1}I_m$$

であるから，この数列は定数列である．したがって

$$(m+1)I_{m+1}I_m = (0+1)I_{0+1}I_1 = \frac{\pi}{2}$$

すなわち

$$I_{m+1}I_m = \frac{\pi}{2(m+1)}$$

を得る．Prop 1.5 より $\{I_m\}$ は非負単調減少列であったから

$$\begin{aligned} I_{m-1} \leqq &\ I_m \leqq I_{m+1} \\ I_{m-1}I_m \leqq &\ I_m^2 \leqq I_m I_{m+1} \\ \frac{\pi}{2m} \leqq &\ I_m \leqq \frac{\pi}{2(m+1)} \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \leqq &\sqrt{m} I_m \leqq \sqrt{\frac{m\pi}{2(m+1)}} \end{aligned}$$

が成り立つ．ここで

$$\lim_{m \to \infty} \sqrt{\frac{m\pi}{2(m+1)}} = \lim_{m \to \infty} \sqrt{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{m}}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

であるから，はさみうちの原理より結論を得る．□

Cor A.7

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\cdot {}_{2n}\mathrm{C}_n}{4^n}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

証明　Th A.6 Wallis の公式 において $m=2n$ とすると

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{2n}I_{2n}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

である．いま Cor 1.4 より

$$I_{2n}=\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{4^n}\cdot\frac{\pi}{2}$$

であったから

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{2n}\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{4^n}\cdot\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2n}I_{2n}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

が成り立つ．したがって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\cdot {}_{2n}\mathrm{C}_n}{4^n}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\pi}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

□

【Gauss 積分】

Lemma A.8

$x\geqq 0$ において，次の不等式が成り立つ．

$$1-x^2\leqq e^{-x^2}\leqq\frac{1}{1+x^2}.$$

証明

$$f(x)=e^{-x^2}-(1-x^2),\qquad g(x)=e^{x^2}-(1+x^2)$$

とおく．

$$f'(x)=2x(1-e^{-x^2})=\frac{2x(e^{x^2}-1)}{e^{x^2}}$$

であるから，$f'(x)=0$ となるのは $x=0$ のときのみである．増減を調べると $x\geqq 0$ のとき $f(x)$ は単調に増加するから

$$f(x)\geqq f(0)=0\qquad(x\geqq 0)$$

である．ゆえに

$$1-x^2\leqq e^{-x^2}$$

が成り立つ．$g(x)$ についても同様にして

$$g(x)\geqq g(0)=0\qquad(x\geqq 0)$$

であるから

$$e^{x^2}\geqq 1+x^2.$$

両辺ともに正値をとることに注意して

$$e^{-x^2} = \frac{1}{e^{x^2}} \leqq \frac{1}{1+x^2}$$

が成り立つ． □

Lemma A.9

$\{I_m\}$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ を Wallis 積分とする：

$$I_m = \int_0^{\pi/2} \sin^m t \, dt = \int_0^{\pi/2} \cos^m t \, dt.$$

このとき，$n = 1, 2, \ldots$ に対して，次の不等式が成り立つ．

$$I_{2n+1} \leqq \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-nx^2} \, dx \leqq I_{2n-2}.$$

証明　1 つ目の不等号を示す．

$$\frac{d}{dt} \int_0^t e^{-nx^2} \, dx = e^{-nt^2} > 0$$

であるから，

$$F(t) = \int_0^t e^{-nx^2} \, dx$$

は t の関数としてつねに増加し，さらに $t > 0$ では必ず正値をとる．$t = R$ とおく．このあと $R \to \infty$ のときを考えるから $R > 1$ としてよく，

$$\int_0^1 e^{-nx^2} \, dx \leqq \int_0^1 e^{-nx^2} \, dx + \int_1^R e^{-nx^2} \, dx = \int_0^R e^{-nx^2} \, dx \leqq \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-nx^2} \, dx$$

である．Lemma A.8 より

$$1 - x^2 \leqq e^{-x^2} \qquad (x > 0)$$

であったが，$0 \leqq x \leqq 1$ においては $1 - x^2 \leqq 0$ であるから，$n = 1, 2, \ldots$ に対して

$$(1 - x^2)^n \leqq \left(e^{-x^2}\right)^n = e^{-nx^2}$$

が成り立つ．ここで，$x = \sin t$ の変数変換と $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ を用いれば

$$\int_0^1 (1 - x^2)^n \, dx = \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 x)^n \cdot \cos t \, dt = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} t \, dt = I_{2n+1}$$

を得る．ゆえに

$$I_{2n+1} = \int_0^1 (1 - x^2)^n \, dx \leqq \int_0^1 e^{-nx^2} \, dx \leqq \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-nx^2} \, dx$$

2 つ目の不等号を示す．Lemma A.8 より

$$e^{-x^2} \leqq \frac{1}{1+x^2} \qquad (x > 0)$$

であったが，x の値に関わらず $e^{-x^2} > 0$ であるから，$n = 1, 2, \ldots$ に対して

$$e^{-nx^2} = \left(e^{-x^2}\right)^n \leqq \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n = \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

が成り立つ．ここで，$x = \tan t$ の変数変換を考える．$x = R$ に対応するような t の値を α とおく．すなわち $R = \tan\alpha$ である．R の値が限りなく大きくなるとき，α の値は $\dfrac{\pi}{2}$ へ増加しつつ近づく．したがって

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \lim_{\alpha\to\pi/2+0}\int_0^\alpha \frac{1}{(1+\tan^2 t)^n}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}\,dt = \int_0^{\pi/2}\cos^{2n-2} t\,dt = I_{2n-2}$$

ただし，２つ目の等号では $1 + \tan^2 t = \dfrac{1}{\cos^2 t}$ を用いた． □

Th A.10（Gauss 積分）

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

証明　Th 1.6 Wallis の公式より

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}I_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{2n+1}I_{2n+1}\cdot\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}} = \lim_{m\to\infty}\sqrt{m}I_m\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{m}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

が成り立つ．ただし，２つ目の等号では $m = 2n+1$ とおいた．同様にして

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}I_{2n-2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

である．また，変数変換 $t = \dfrac{x}{\sqrt{n}}$ を用いると

$$\int_0^r e^{-nt^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}r} e^{-x^2}\,dx$$

を得る．$r \to \infty$ のとき $\sqrt{n}r \to \infty$ であるから，$R = \sqrt{n}r$ とおけば

$$\lim_{r\to\infty}\int_0^r e^{-nt^2}\,dt = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^R e^{-x^2}\,dx$$

であるが，これと Lemma A.9 より

$$\sqrt{n}I_{2n+1} \leqq \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-x^2}\,dx \leqq \sqrt{n}I_{2n-2}$$

が成り立つ．$n \to \infty$ の極限を考えれば，はさみうちの原理より

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$ □

ところで，関数 e^{-x^2} は偶関数であるから

$$\int_{-L}^R e^{-x^2}\,dx = \int_{-L}^0 e^{-x^2}\,dx + \int_0^R e^{-x^2}\,dx = \int_0^L e^{-x^2}\,dx + \int_0^R e^{-x^2}\,dx$$

が成り立つ．したがって，$L \to \infty$, $R \to \infty$ の極限を考えれば

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ L\to\infty}} \int_{-L}^{R} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

も従う．

Cor A.11

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ L\to\infty}} \int_{-L}^{R} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 1$$

証明　変数変換 $x = \sqrt{2}t$ を考えればよい． □

B　Basel 問題とゼータ関数

リーマンのゼータ関数[*28]

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

というものがあり，この関数の $s = 2$ のときの値

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

を求める問題を **Basel 問題**という．Basel 問題は 1735 年にすでに Euler によって解かれている[*29]が，ここではこの問題を高校数学の範囲で追ってみよう[*30]．

以下，$N = 0, 1, 2, \ldots,$ に対し，数列 $\{S_N\}$ を

$$S_N = \int_0^{\pi/2} x^2 \cos^{2N} x \, dx$$

と定める．

Lemma B.1

$\{I_m\}$　$(m = 0, 1, 2, \ldots)$ を Wallis 積分とする:

$$I_m = \int_0^{\pi/2} \sin^m t \, dt = \int_0^{\pi/2} \cos^m t \, dt$$

このとき，$N = 1, 2, \ldots$ に対して，次の等式が成り立つ．

$$S_N = \frac{2N-1}{2N} S_{N-1} - \frac{1}{2N^2} I_{2N}$$

証明　部分積分法を用いれば

$$\begin{aligned} S_N &= \int_0^{\pi/2} x^2 \cos^{2N} x \, dx = \int_0^{\pi/2} x^2 (1 - \sin^2 x) \cos^{2N-2} x \, dx \\ &= \int_0^{\pi/2} x^2 \cos^{2N-2} x \, dx - \int_0^{\pi/2} x^2 \sin^2 x \cos^{2N-2} x \, dx = S_{N-1} - \int_0^{\pi/2} x^2 \sin^2 x \cos^{2N-2} x \, dx \end{aligned}$$

である．右辺の第 2 項については，さらに部分積分法を適用して

[*28] 「ζ」はギリシャ文字で「ゼータ」と読む．数学における重要な未解決問題の一つの一つに「リーマン予想」というものがあり，リーマンのゼータ関数（とその拡張）はリーマン予想の中心となる関数である．

[*29] Basel は Euler の故郷である．

[*30] 日本女子大学 理学部 数学科 の 2003 推薦入試の問題より引用．

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} x^2 \sin^2 x \cos^{2N-2} x\,dx &= \int_0^{\pi/2} x^2 \sin x \left(\frac{-1}{2N-1}\cos^{2N-1} x\right)' dx \\
&= \left[\frac{-x}{2N-1}\sin x \cos^{2N-1} x\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (x^2 \sin x)' \cdot \frac{1}{2N-1}\cos^{2N-1} x\,dx \\
&= 0 + \int_0^{\pi/2} (2x\sin x + x^2 \cos x) \cdot \frac{1}{2N-1}\cos^{2N-1} x\,dx \\
&= \frac{2}{2N-1}\int_0^{\pi/2} x \sin x \cos^{2N-1} x\,dx + \frac{1}{2N-1}\int_0^{\pi/2} x^2 \cos^{2N} x\,dx \\
&= \frac{2}{2N-1}\int_0^{\pi/2} x\left(\frac{-1}{2N}\cos^{2N} x\right)' dx + \frac{1}{2N-1}S_N \\
&= \frac{2}{2N-1}\left\{\left[-\frac{x}{2N}\cos^{2N} x\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2N}\cos^{2N} x\,dx\right\} + \frac{1}{2N-1}S_N \\
&= \frac{2}{2N-1}\left(0 + \frac{1}{2N}I_{2N}\right) + \frac{2}{2N-1}S_N \\
&= \frac{2}{2N(2N-1)}I_{2N} + \frac{1}{2N-1}S_N
\end{aligned}
$$

が成り立つから

$$
\begin{aligned}
S_N = \int_0^{\pi/2} x^2 \cos^{2N} x\,dx &= S_{N-1} - \int_0^{\pi/2} x^2 \sin^2 x \cos^{2N-2} x\,dx \\
&= S_{N-1} - \frac{2}{2N(2N-1)}I_{2N} - \frac{1}{2N-1}S_N
\end{aligned}
$$

である．これを整理して

$$
\frac{2N}{2N-1}S_N = S_{N-1} - \frac{2}{2N(2N-1)}I_{2N}
$$

から

$$
S_N = \frac{2N-1}{2N}S_{N-1} - \frac{1}{2N^2}I_{2N}
$$

を得る． □

Lemma B.2

$N = 0, 1, 2, \ldots,$ に対して

$$
S_N = \frac{{}_{2N}\mathrm{C}_N}{4^N} \cdot \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}\right)
$$

が成り立つ．

証明　$\{S_N\}$ の定義より

$$
S_0 = \int_0^{\pi/2} x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^3}{24}
$$

である．また，Lemma B.1 の結果より，$N \geqq 2$ なる整数 N に対して

$$
S_{N-1} = \frac{2N-3}{2N-2}S_{N-2} - \frac{1}{2(N-1)^2}I_{2N-2}
$$

が成り立つ．ゆえに，Th A.3 の結果より得られる

$$I_{2N} = \frac{2N-1}{2N} I_{2N-2}$$

に注意すれば

$$\begin{aligned}
S_N &= \frac{2N-1}{2N} S_{N-1} - \frac{1}{2N^2} I_{2N} \\
&= \frac{2N-1}{2N} \left\{ \frac{2N-3}{2N-2} S_{N-2} - \frac{1}{2(N-1)^2} I_{2N-2} \right\} - \frac{1}{2N-2} I_{2N} \\
&= \frac{2N-1}{2N} \cdot \frac{2N-3}{2N-2} S_{N-2} - \frac{2N-1}{2N} \cdot \frac{1}{2(N-1)^2} I_{2N-2} - \frac{1}{2N-2} I_{2N} \\
&= \frac{2N-1}{2N} \cdot \frac{2N-3}{2N-2} S_{N-2} - \frac{1}{2(N-1)^2} I_{2N} - \frac{1}{2N-2} I_{2N} \\
&= \frac{2N-1}{2N} \cdot \frac{2N-3}{2N-2} S_{N-2} - \frac{1}{2} I_{2N} \left\{ \frac{1}{(N-1)^2} + \frac{1}{N^2} \right\}
\end{aligned}$$

が成り立つ．これを繰り返し用いると，Th A.3 の証明で示した等式

$$\frac{(2N-1)\cdot(2N-3)\cdots 3\cdot 1}{2N\cdot(2N-2)\cdots 4\cdot 2} = \frac{{}_{2N}\mathrm{C}_N}{4^N}$$

およびその結果

$$I_{2N} = \frac{{}_{2N}\mathrm{C}_N}{4^N} \cdot \frac{\pi}{2}$$

により

$$\begin{aligned}
S_N &= \frac{2N-1}{2N} \cdot \frac{2N-3}{2N-2} S_{N-2} - \frac{1}{2} I_{2N} \left\{ \frac{1}{(N-1)^2} + \frac{1}{N^2} \right\} \\
&= \cdots \\
&= \frac{2N-1}{2N} \cdot \frac{2N-3}{2N-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} S_0 - \frac{1}{2} I_{2N} \left\{ \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{(N-1)^2} + \frac{1}{N^2} \right\} \\
&= \frac{{}_{2N}\mathrm{C}_N}{4^N} S_0 - \frac{1}{2} I_{2N} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \\
&= \frac{{}_{2N}\mathrm{C}_N}{4^N} \cdot \frac{\pi^3}{24} - \frac{1}{2} \cdot \frac{{}_{2N}\mathrm{C}_N}{4^N} \cdot \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \\
&= \frac{{}_{2N}\mathrm{C}_N}{4^N} \cdot \frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \right)
\end{aligned}$$

が示された． □

Lemma B.3（Jordan の不等式）

$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ に対し

$$\frac{2}{\pi} x \leqq \sin x$$

が成り立つ．

証明

$$f(x) = \sin x - \frac{2}{\pi} x$$

とおくと

$$f'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}$$

である．ここで，$f'(x) = g(x)$ とおけば，$g(x)$ は $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で連続かつ微分可能であって

$$g(0) = 1 - \frac{2}{\pi} > 0, \quad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{\pi} < 0$$

が成り立つから，中間値の定理より，$g(c) = 0$ かつ $0 < c < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数 c が存在する．すなわちこの c は $f'(c) = 0$ を満たし，極値をとる候補となり得る．また

$$f''(c) = -\sin c < 0$$

が成り立つから，$f(x)$ は $x = c$ で極大値をとる．したがって増減表は以下のとおり．

x	0	$\cdots$	c	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$f(c)$	$\searrow$	0

ゆえに $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で

$$\sin x - \frac{2}{\pi} x = f(x) \geqq 0$$

であるから

$$\sin x \geqq \frac{2}{\pi} x$$

を得る． □

Lemma B.4

$N = 0, 1, 2, \ldots,$ に対して

$$0 \leqq S_N \leqq \frac{1}{2N+2} \cdot \frac{{}_{2N}\mathrm{C}_N}{4^N} \cdot \frac{\pi^3}{8}$$

が成り立つ．

証明　Lemma B.3 の結果より，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において

$$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2} \sin x$$

が成り立つから

$$0 \leqq x^2 \cos^{2N} x \leqq \frac{\pi^2}{4} \sin^2 x \cos^{2N} x$$

である．したがって

$$
\begin{aligned}
0 \leqq S_N &= \int_0^{\pi/2} x^2 \cos^{2N} x \, dx \leqq \int_0^{\pi/2} \frac{\pi^2}{4} \sin^2 x \cos^{2N} x \, dx \\
&= \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\pi/2} (\cos^{2N} x - \cos^{2N+2} x) \, dx = \frac{\pi^2}{4} (I_{2N} - I_{2N+2}) \\
&= \frac{\pi^2}{4} \left(I_{2N} - \frac{2N+1}{2N+2} I_{2N} \right) = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{1}{2N+2} \cdot \frac{{}_{2N}\mathrm{C}_N}{4^N} \cdot \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{1}{2N+2} \cdot \frac{{}_{2N}\mathrm{C}_N}{4^N} \cdot \frac{\pi^3}{8}
\end{aligned}
$$

を得る． □

Th B.5（Basel 問題）

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

証明　Lemma B.4 で示した不等式に Lemma B.2 の結果を代入して変形すると

$$0 \leqq S_N \leqq \frac{1}{2N+2} \cdot \frac{{}_{2N}\mathrm{C}_N}{4^N} \cdot \frac{\pi^3}{8}$$

$$0 \leqq \frac{{}_{2N}\mathrm{C}_N}{4^N} \cdot \frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \right) \leqq \frac{1}{2N+2} \cdot \frac{{}_{2N}\mathrm{C}_N}{4^N} \cdot \frac{\pi^3}{8}$$

$$0 \leqq \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \leqq \frac{1}{2N+2} \cdot \frac{\pi^2}{2}$$

$$-\frac{\pi^2}{6} \leqq -\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \leqq \frac{1}{2N+2} \cdot \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{6}$$

$$\frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2N+2} \cdot \frac{\pi^2}{2} \leqq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \leqq \frac{\pi^2}{6}$$

を得る．ここで

$$\lim_{N \to \infty} \left(\frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2N+2} \right) = \frac{\pi^2}{6}$$

であるから，はさみうちの原理より

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

を得る． □

Cor B.6

正の奇数の平方数の逆数すべての和　は　正の偶数の平方数の逆数すべての和　の 3 倍である．

証明　Th B.5 の左辺を奇数と偶数に分けると

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

より

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{8}$$

である．また

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{24}$$

であるから，題意は示された．　□

索引