数学A　場合の数　No.1

1　数え上げの法則

ある事柄が起こるパターン（起こり方）の総数を，**場合の数** という．場合の数を数えるためには，

(a) 樹形図や表を用いる　　(b) 辞書式の配列を用いる　　(c) 正確に場合分けをする

などの方法で，**「もれなく」「重複なく」**数えることが重要である．

和の法則

2 つの事柄 A, B について，A の起こり方が m 通り，B の起こり方が n 通りであり，A と B が同時に起こることがないとき，A または B の起こり方[*1]は，$m+n$ 通りである．

例　**普通の** トランプの中から 1 枚選ぶとき，♡ のカードまたは ♠ のカードを引く場合の数は 26 通りである．

積の法則

2 つの事柄 A, B について，A の起こり方が m 通り，そのすべてに対して B の起こり方が n 通りであるとき，A かつ B の起こり方[*2]は，mn 通りである．

例　**普通の** トランプの中から 2 枚続けて選ぶとき，1 枚目に ♡，2 枚目に ♠ のカードを引く場合の数は 169 通りである．

2　順列と階乗

順列

相異なる n 個のものから r 個を取り出して (1 列に) 並べる場合の数を，n 個のものから r 個とる **順列** といい，記号 ${}_n\mathrm{P}_r$ で表す[*3].

階乗

負でない整数 n に対して，$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ を n の **階乗** という．ここで $0! = 1$ と約束する．

注意　$n!$ は相異なる n 個のものを 1 列に並べる場合の数を表す[*4].

順列の計算

1. ${}_n\mathrm{P}_r = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r\text{ 個}} = \dfrac{n!}{(n-r)!}\qquad (r \leqq n).$
2. ${}_n\mathrm{P}_n = n!.$

例　男子 5 人を 1 列に並べる場合の数は 120 通りである．

例　40 人のクラスの中から学級委員長と副委員長を 1 人ずつ選ぶ場合の数は，1560 通りである．

[*1] A と B のうち，少なくとも一方が起こるパターンという意味.

[*2] A と B が同時に起こるパターンという意味.

[*3] 「P」は順列を意味する英単語 Permutation の略.

[*4] 並べ替えの観点によれば，「$0! = 1$」 は「0 個のものは並べられないというただ 1 通りのパターンしかない」と考えることもできる.

いろいろな順列

1. 円順列: n 個の相異なるものを円形に並べる順列の総数は $(n-1)!$ 通りである．とくに，裏返しができる (まわり方を区別しない) 場合は $\dfrac{(n-1)!}{2}$ 通りである．
2. 重複順列: n 個のものから，同じものの重複を許して r 個をとって並べる順列の総数は，n^r 通りである．
3. 同じものを含む順列: n 個のものの中に，p 個の同じもの，q 個の同じもの，r 個のまた同じもの $\cdots$ があるとき，これら n 個を 1 列に並べる順列の総数は $\dfrac{n!}{p!q!r!\cdots}$ $(p+q+r+\cdots=n)$ 通りである．

例　8 人がテーブルを囲むとき，座り方は 5040 通りである．また，8 個の異なる形のビーズで円形のアクセサリを作るとき，ビーズの並べ方は 2520 通りである．

例　普通のサイコロを 3 回振るとき，出る目の組み合わせは 216 通りである．

例　「HOT LIMIT」の 8 文字を並べ替えてできる文字列の総数は，10080 通りである．

3　組み合わせ

組み合わせ

相異なる n 個のものから 順序に関係なく r 個選んで取り出す取り出し方の場合の数を，n 個のものから r 個とる 組み合わせ といい，記号 ${}_n\mathrm{C}_r$ で表す*5．

注意　順列では取り出す順序が異なるものをすべて別のものと考えたが，組み合わせでは順序は考えない．

組み合わせの計算

1. ${}_n\mathrm{C}_r = \dfrac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}^{r\text{ 個}}}{\underbrace{(n-r)(n-r-1)(n-r-2)\cdots 1}_{r\text{ 個}}} = \dfrac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$　$(r \leqq n)$.
2. ${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r}$.
3. ${}_n\mathrm{C}_0 = {}_n\mathrm{C}_n = 1$.

注意　2. の式は「n 個の中から取り出す r 個選ぶ」ことと「n 個の中から取り出さない $(n-r)$ 個を選ぶこと」が同じであることを意味する．

例　40 人の生徒の中から 2 人の学級役員を選ぶ場合の数は 780 通りである．

例　10 人の生徒の中から 5 人を選ぶ場合の数は 252 通り，特定の 2 人を含む 5 人を選ぶ場合の数は 56 通りである．

例　n を 3 以上の整数とする．正 n 角形の対角線の本数は ${}_n\mathrm{C}_2 - n$ 本，n 個の頂点のうちの 3 点を頂点とする三角形は ${}_n\mathrm{C}_3$ 個である．

例　9 人を 3 人ずつ A，B，C の部屋に分ける場合の数は 1680 通り，3 人ずつ 3 つのグループに分ける場合の数は 280 通りである．また，4 人，4 人，1 人のグループに分ける場合の数は 315 通りである．

n 個の相異なるものの中から，重複を許して r 個とる組み合わせを 重複組合せ という．（参考書などでは）記号 ${}_n\mathrm{H}_r$ で表すことがある*6．考え方を知っていれば記号を覚える必要はないが，計算については次の関係が成り立つ．

*5 「C」は組み合わせを表す英単語 Combination の略である．
*6 「H」の由来は Homogeneous product という英語からだと思われる．

重複組み合わせの計算

$$ {}_n\mathrm{H}_r = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r \qquad (r > n \text{ でもよい}) $$

例　10 個の同じチョコレートを 3 つの皿に載せる組み合わせは，空の皿があってもよいならば，66 通りである．

考え方　チョコレートを ◯ で表す．また，2 本の仕切り | を 10 個の ◯ とともに並べると

◯◯◯◯◯◯◯◯◯◯||

となる．これらを並び替えたとき，左から 1 つ目の | の左側にある ◯ を 1 つ目の皿に，2 つ目の | の右側にある ◯ を 3 つ目の皿に，そして 2 つの | の間にある ◯ を 2 つ目の皿に載せればよい．例えば次のようなイメージである:

$$ \bigcirc\,|\,\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\,|\,\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc \quad\longrightarrow\quad \underbrace{\bigcirc}\quad \underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc}\quad \underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc} $$

この考え方によれば，載せ方の総数は 10 個の ◯ と 2 個の | の並べ方を数えればよい．ゆえに同じものを含む順列の考え方から

$$ \frac{12!}{10!2!} = 66 $$

である．一方，記号 H を用いるならば，「3 種類の皿から重複を許してチョコレートを載せるものを 10 回選ぶ」と考えて

$$ {}_3\mathrm{H}_{10} = {}_{12}\mathrm{C}_{10} = {}_{12}\mathrm{C}_2 = 66 $$

である．${}_{10}\mathrm{H}_3$ ではないので注意せよ．

例　4 種類のジュースを全部で 5 本買うことにする．選ばないジュースがあってもよいならば，選び方は 56 通りである．すべてのジュースを少なくとも 1 本選ぶならば，選び方は 4 通りである．

考え方

【選ばないジュースがあってもよい場合】 仕切り | を 3 つ用意する．仕切りで区切られた場所に応じて，左から 1 種類目，2 種類目，$\cdots$ とジュースの本数を決めるとする．ジュースを □ で表すと，例えば次のようなイメージである:

□□ | □ || □□　⟶　ジュース A を 2 本，ジュース B を 1 本，ジュース C を 0 本，ジュース D を 2 本

この考え方によれば，購入方法の総数は 5 個の □ と 3 個の | の並べ方を数えればよい．ゆえに同じものを含む順列の考え方から

$$ \frac{8!}{5!3!} = 56 $$

である．一方，記号 H を用いるならば，「4 種類のジュースから重複を許して 5 本のジュースを選ぶ」から

$$ {}_4\mathrm{H}_5 = {}_8\mathrm{C}_5 = {}_8\mathrm{C}_3 = 56 $$

である．

【すべてのジュースを少なくとも 1 本選ぶ場合】 まずはすべてのジュースを 1 本ずつ購入しておく．残り 1 本の選び方は，もちろん 4 通りしかない．

注意　ジュースの例は次のようにより数学らしい（？）表現で問われることがある:

- 【選ばないジュースがあってもよい場合】: 方程式 $x+y+z+w=5$ の非負の整数解の（組の）個数を求めよ．
- 【すべてのジュースを少なくとも 1 本選ぶ場合】: 方程式 $x+y+z+w=5$ の正の整数解の（組の）個数を求めよ．