数学II　式と証明　No.1

1　式の展開

3 次式の展開・因数分解

(1) $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$　　(2) $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

(1) のより一般的な場合として，n 次式の展開について，次の式が成り立つ．

二項定理

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n b^0 + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1} b^1 + {}_n\mathrm{C}_2 a^{n-2} b^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} a^1 b^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n a^0 b^n$$

${}_n\mathrm{C}_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ は場合の数で導入した記号である．${}_n\mathrm{C}_r a^{n-r} b^r$ を 一般項，${}_n\mathrm{C}_0, {}_n\mathrm{C}_1, {}_n\mathrm{C}_2, \cdots$ を 二項係数 という．

例　$(2x-1)^8$ の展開式において，x^3 の係数は -448 である．

二項係数の和の値を求める問題では，$(1+x)^n$ の展開式を用いることが多い．

例　${}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n = 2^n$.

例　${}_n\mathrm{C}_0 - {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 - {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots + (-1)^n {}_n\mathrm{C}_n = 0$.

2　整式の除法

整式 $A(x)$ と，次数が $A(x)$ 以下である整式 $B(x)$ について，次数が $B(x)$ よりも小さい整式 $R(x)$ が存在して

$$A(x) - R(x) = B(x)Q(x)$$

を満たす $Q(x)$ が考えられるとき，$Q(x)$ を $A(x)$ を $B(x)$ で割った 商，$R(x)$ を $A(x)$ を $B(x)$ で割った 余り という．

整式の除法

整式 $A(x)$ を整式 $B(x)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $R(x)$ とするとき，

$$A(x) = B(x)Q(x) + R(x) \quad (\text{ただし，}(R(x)\text{ の次数}) < (B(x)\text{ の次数}))$$

除法の計算手順は整数の除法とほとんど同じである．

例

1.
$$\begin{array}{rr}
 & x - 2 \\ \cline{2-2}
x-2 \big) & x^2 - 4x + 3 \\
 & x^2 - 2x \\ \cline{2-2}
 & -2x + 3 \\
 & -2x + 4 \\ \cline{2-2}
 & -1
\end{array}$$

商: $x-2$，余り: -1

2.
$$\begin{array}{rr}
 & 2x \\ \cline{2-2}
x+2 \big) & 2x^2 + 4x + 3 \\
 & 2x^2 + 4x \\ \cline{2-2}
 & 3
\end{array}$$

商: $2x$，余り: 3

3.
$$\begin{array}{rr}
 & x \quad - 1 \\ \cline{2-2}
x^2+3x+5 \big) & x^3 + 2x^2 + 3x + 4 \\
 & x^3 + 3x^2 + 5x \\ \cline{2-2}
 & -x^2 - 2x + 4 \\
 & -x^2 - 3x - 5 \\ \cline{2-2}
 & x + 9
\end{array}$$

商: $x-1$，余り: $x+9$

$A(x)$ を $B(x)$ で割った余りが 0 であるとき，$B(x)$ は $A(x)$ の 因数 であるという．

注意　3 次式を 2 次式で割ったときの余りは 1 次式または定数（0 次式）であるから，$ax+b$ と表せる．

3　分数式

$A(x), B(x)$ を整式とする．$B(x) \neq 0$ とするとき，$\dfrac{A(x)}{B(x)}$ と表される式を 分数式 という．$A(x)$ が $B(x)$ で割り切れる，すなわち $A(x)$ を $B(x)$ で割ったときの余りが 0 であるとき，分数式 $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ は整式となる．

分数式 $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ に対して，$A(x)$ を 分子，$B(x)$ を 分母 という．整式と分数式をまとめて 有理式 という．

約分と通分

- 分数式の分母と分子が同じ因数を含むとき，分母分子をその因数で割って式を簡単にすることができる．これを 約分 といい，それ以上約分することができない状態の分数式を 既約分数式 という．
- 分母の異なる複数の分数式に対して，分母分子に同じ整式をかけて分母をそろえることを 通分 という．

例　$\dfrac{x^3+27}{x+3} = \dfrac{(x+3)(x^2-3x+9)}{x+3} = x^2-3x+9.$

例　$\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{1}{x+1} \cdot \dfrac{x-1}{x-1} + \dfrac{1}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{x-1+1}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{x}{(x+1)(x-1)}.$

例　$\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{x+2}{x^2+2x+2} - \dfrac{x-2}{x^2-2x+2}\right) = \dfrac{1}{x^4+4}.$