数学II　指数関数と対数関数　No.1

1　指数の拡張

数 a を n 個かけあわせた数を a の n 乗といい，a^n と表す．すなわち

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n\text{ 個}}$$

である．a^1, a^2, ⋯⋯ をまとめて a の **累乗** といい，a を掛け合わせた数 n を **指数** という．m, n を正の整数とするとき，次の **指数法則** が成り立つ．

(1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$　(2) $(a^m)^n = a^{nm} = (a^n)^m$　(3) $(ab)^n = a^n b^n$

この指数法則を，指数が正の整数でない場合にも成り立つよう拡張することを考える．仮に $m = 3$，$n = 0$ としてみると

$$a^3 \times a^0 = a^{3+0} = a^3 \qquad \text{ゆえに} \qquad a^0 = 1$$

とするのが自然である．次に，m はそのままにして，$n = -m$ としてみると

$$a^m \times a^{-m} = a^{m+(-m)} = a^0 = 1 \qquad \text{ゆえに} \qquad a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

これを踏まえて，次のように定める．

0 と負の指数

$a \neq 0$ で，n を整数とするとき

$$a^0 = 1, \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

注意　0 での除法は定義できないから，0^0 については考えないものとする．

n を正の整数とするとき，n 乗すると a になる数を a の **n 乗根** という．すなわち，方程式 $x^n = a$ の解が a の n 乗根である．とくに 2 乗根のことを **平方根** といい，2 乗根，3 乗根，4 乗根，⋯⋯ をまとめて **累乗根** という．

正の数 a に対しては $x^n = a$ を満たす正の数 x がただ 1 つ定まることが知られていて，この正の数 x を $\sqrt[n]{a}$ で表す．ただし，$n = 2$ の場合はふつう 2 を省略して $\sqrt{a}$ と表す．この定義より，次が成り立つ．

累乗根の性質

$a, b > 0$，m, n を正の整数とするとき

1. $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$　2. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$　3. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$　4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

上の定義を用いて，次のように定める．

有理数の指数

$a \neq 0$ で，m, n を正の整数，p を正の有理数とするとき

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \qquad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \qquad a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

この定義は指数法則を満たしている．以上のことから改めて指数法則をまとめると，次のようになる．

指数法則

$a, b > 0$，r, s を有理数とするとき

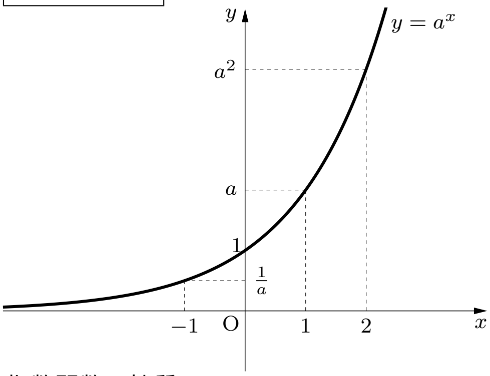
1. $a^r \times a^s = a^{r+s}$　2. $\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$　3. $(a^r)^s = a^{rs} = (a^s)^r$　4. $(ab)^r = a^r b^r$

ここでは厳密に示すことはしないが，実は指数法則は r, s が実数のときも成り立つ．

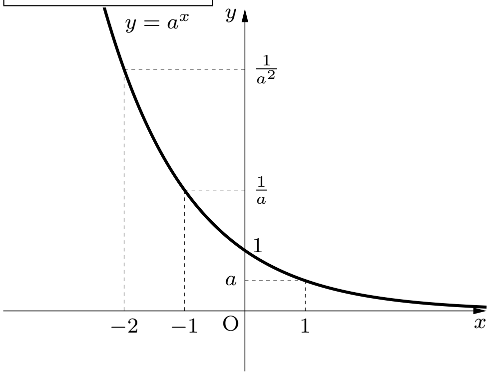
2　指数関数とそのグラフ

$a > 0,\ a \neq 1$ とするとき，$y = a^x$ は x の関数である．この関数を a を 底 とする x の 指数関数 という．一般に，指数関数のグラフは次のようになる．

$\boxed{a > 1 \text{ のとき}}$



$\boxed{0 < a < 1 \text{ のとき}}$



指数関数の性質

(1) 定義域は実数全体で，値域は正の数全体である．すなわち，すべての実数 x に対して $a^x > 0$.

(2) グラフは点 $(0, 1)$，$(1, a)$ を通り，x 軸を漸近線[*1] とする．

(3) $a > 1$ のとき，増加関数（グラフが右上がり）で，

$$p < q \quad \Longleftrightarrow \quad a^p < a^q$$

$0 < a < 1$ のとき，減少関数（グラフが右下がり）で，

$$p < q \quad \Longleftrightarrow \quad a^p > a^q$$

3　指数を含む方程式と不等式

指数を含む方程式や不等式は，底を揃えて指数を比較して解く．

例　方程式 $8^x = 32$ の解を求める．

$$2^{3x} = (2^3)^x = 8^x = 32 = 2^5 \quad \text{であるから} \quad 3x = 5. \qquad \text{ゆえに} \quad x = \frac{5}{3}$$

例　不等式 $27^x < 9$ の解を求める．

$$3^{3x} = (3^3)^x = 27^x < 9 = 3^2 \quad \text{であるから，底 3 が 1 より大きいことに注意して} \quad 3x < 2. \qquad \text{ゆえに} \quad x < \frac{2}{3}$$

例　不等式 $0.4^x \leqq 0.16$ の解を求める．

$$0.4^x \leqq 0.16 = 0.4^2 \quad \text{であるから，底 0.4 が 1 より小さいことに注意して} \quad x \geqq 2.$$

例　方程式 $4^x - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$ の解を求める．$t = 2^x$ とおいて方程式を変形すると

$$t^2 - 3t - 4 = 0 \quad \text{すなわち} \quad t = -1, 4$$

である．$t = 2^x > 0$ であるから，$t = 4$．ゆえに $x = 2$.

注意　$a > 0$ とすると，a^x，a^{-x} はどちらも 0 より大きいから，相加平均と相乗平均の大小関係より

$$a^x + a^{-x} \geqq 2\sqrt{a^x \times a^{-x}} = 2$$

が成り立つ．等号成立条件を考えれば，$a^x + a^{-x}$ は，$x = 0$ で最小値 2 をとる．

[*1] グラフが限りなく近づく直線のこと．

数学II　指数関数と対数関数　No.2

4　対数

一般に，$a>0,\ a\neq 1$ のもとで指数関数 $y=a^x$ を考えると，どのような正の数 M に対しても，$M=a^x$ を満たす x の値がただ 1 つ定まる．この x を a を **底** とする M の **対数** といい，記号 $\log_a M$ で表す．すなわち，次のようになる．

対数の定義

$a>0,\ a\neq 1,\ M>0$ とするとき

$$p=\log_a M \iff a^p=M.$$

注意　$a>0,\ a\neq 1$ を **底の条件**，$M>0$ を **真数条件**という．

指数法則から，次の性質が導かれる．

対数の性質

$a>0,\ b>0,\ c>0,\ a\neq 1,\ c\neq 1,\ M>0,\ N>0$ とするとき

(1) $\log_a 1=0$　　(2) $\log_a a=1$

(3) $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$　　(4) $\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

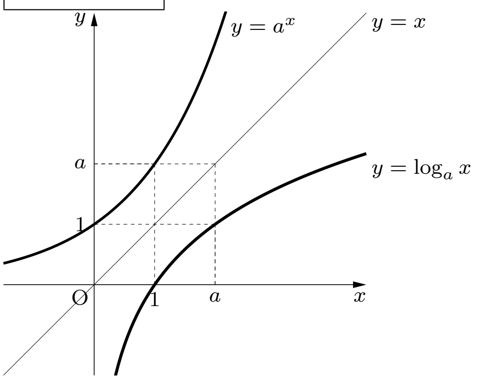
(5) $\log_a M^p=p\log_a M$　　(6) $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

注意　(6) の式を **底の変換公式** という．

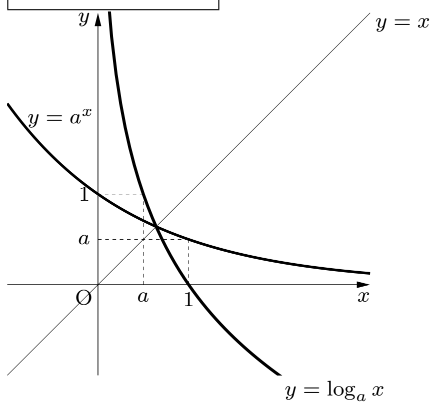
5　対数関数とそのグラフ

$a>0,\ a\neq 1$ のとき，関数 $y=\log_a x$ を a を **底** とする **対数関数** という．対数の定義から，この関数は指数関数 $y=a^x$ において x と y を入れかえた関数である．すなわち，対数関数 $y=\log_a x$ と指数関数 $y=a^x$ は直線 $y=x$ に関して対称なグラフであり，次のようになる．

$a>1$ のとき



$0<a<1$ のとき



対数関数の性質

(1) 定義域は正の数全体で，値域は実数全体である．

(2) グラフは点 $(1,0)$，$(a,1)$ を通り，y 軸を漸近線とする．

(3) $a>1$ のとき，増加関数（グラフが右上がり）で，

$$0<p<q \iff \log_a p<\log_a q$$

　$0<a<1$ のとき，減少関数（グラフが右下がり）で，

$$0<p<q \iff \log_a p>\log_a q$$

6　対数を含む方程式と不等式

対数を含む方程式や不等式は，底を揃えて真数部分を比較するか，あるいは対数の定義に戻って考える．

例　方程式 $\log_3 x = 4$ の解を考える．真数条件より，$x > 0$ である．対数の定義より

$$\log_3 x = 4 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 3^4 = 81. \quad \text{これは } x > 0 \text{ を満たす．}$$

あるいは，$4 = \log_3 3^4 = \log_3 81$ と変形して，真数部分を比較してもよい．

例　不等式 $\log_2 (x-1) + \log_2 (x-3) < 3$ の解を考える．真数条件より

$$x - 1 > 0, \quad x - 3 > 0$$

であるから，その共通範囲は $x > 3$ である．はじめの不等式を対数の性質を用いて変形すると

$$\log_2 (x^2 - 4x + 3) = \log_2 (x-1)(x-3) = \log_2 (x-1) + \log_2 (x-3) < 3 = \log_2 8.$$

底 2 は 1 より大きいから，真数部分を比較して

$$x^2 - 4x + 3 < 8 \quad \Longleftrightarrow \quad (x-5)(x+1) < 0. \quad \text{ゆえにこの二次不等式の解は} \quad -1 < x < 5.$$

はじめの真数条件と合わせて，求める解は

$$3 < x < 5.$$

例　不等式 $\log_{0.5} x + \log_2 3 > 0.25$ の解を考える．真数条件より，$x > 0$ である．底の変換公式より

$$\log_2 3 = \frac{\log_{0.5} 3}{\log_{0.5} 2} = \frac{\log_{0.5} 3}{\log_{0.5} (0.5)^{-1}} = \frac{\log_{0.5} 3}{-1} = -\log_{0.5} 3$$

であるから，はじめの不等式は

$$\log_{0.5} \frac{x}{3} = \log_{0.5} x - \log_{0.5} 3 > 0.25 = \log_{0.5} (0.5)^2.$$

底 0.5 は 1 より小さいから，不等号の向きに注意して真数を比較すると

$$\frac{x}{3} < 2. \quad \text{ゆえに} \quad x < 6. \qquad \text{はじめの真数条件と合わせて，} \quad 0 < x < 6.$$

また，指数を含む方程式の解を，対数を用いて表すことがある．

例　方程式 $3^x = 5$ の解は，$x = \log_3 5$ である．