演習問題　解答

第１回

第１問 (1) a, b を実数として，$z = a + bi$ とおく．

$$0 = z - \overline{z} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi$$

より $b = 0$ である．すなわち z の虚部は 0 であるから，z は実数である．

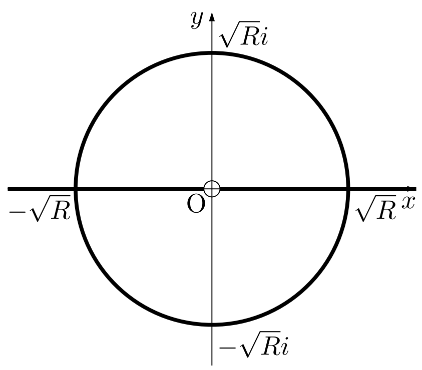
(2) (1) より，α が実数となるとき，$\alpha - \overline{\alpha} = 0$ が成り立つ．$\alpha - \overline{\alpha}$ を計算すると，

$$0 = \alpha - \overline{\alpha} = \left(z + \frac{R}{z}\right) - \overline{\left(z + \frac{R}{z}\right)} = \left(z + \frac{R}{z}\right) - \left(\overline{z} + \frac{R}{\overline{z}}\right) = z + \frac{R}{z} - \overline{z} - \frac{R}{\overline{z}}$$

両辺に $z\overline{z}$ をかけて

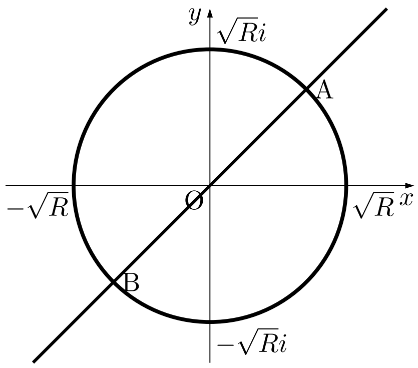
$$\begin{aligned} 0 &= z^2\overline{z} + R\overline{z} - z\overline{z}^2 - Rz = |z|^2 z + R\overline{z} - |z|^2\overline{z} - Rz \\ &= |z|^2(z - \overline{z}) - R(z - \overline{z}) = (z - \overline{z})(|z|^2 - R) \end{aligned}$$

したがって，$z - \overline{z} = 0$ または $|z|^2 - R = 0$ が成り立つ．1 つ目の式は (1) で示した z の実数条件に他ならない．また，$R > 0$ であるから，2 つ目の式は $|z| = \sqrt{R}$，すなわち原点を中心とした半径 $\sqrt{R}$ の円である．ここで，α の定義より $z \neq 0$ であることに注意すると，求める z の全体は



上の図の太線部分，半径 $\sqrt{R}$ の円周および実軸上である．ただし，原点は含まない．

(3) $|z - 1 - i| = |z - (1 + i)|$ は複素数 z と複素数 $1 + i$ との距離を表す．z は (2) の条件を満たし，かつ実数でないから，(2) の図の半径 $\sqrt{R}$ の円周上にある．この円周上で $1 + i$ との距離が最大，最小をとるとすると，z は原点および $1 + i$ を通る直線上であるから，次の図の 2 点 A,B であることがわかる．



点 A を表す複素数は $\dfrac{\sqrt{R}}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{R}}{\sqrt{2}}i$, 点 B を表す複素数は $\dfrac{-\sqrt{R}}{\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{R}}{\sqrt{2}}i$ であるから，$|z-1-i|$ の最小値は，z が点 A にあるとき

$$\begin{aligned}|z-1-i| &= \left|\left(\frac{\sqrt{R}}{\sqrt{2}}-1\right)+\left(\frac{\sqrt{R}}{\sqrt{2}}-1\right)i\right| \\ &= \sqrt{2\left(\frac{\sqrt{R}}{\sqrt{2}}-1\right)^2} = \left|\frac{\sqrt{R}}{\sqrt{2}}-1\right|\sqrt{2} = \left|\sqrt{R}-\sqrt{2}\right|.\end{aligned}$$

最大値は z が点 B にあるとき

$$\begin{aligned}|z-1-i| &= \left|\left(\frac{\sqrt{R}}{\sqrt{2}}+1\right)+\left(\frac{\sqrt{R}}{\sqrt{2}}+1\right)i\right| \\ &= \sqrt{2\left(\frac{\sqrt{R}}{\sqrt{2}}+1\right)^2} = \left|\frac{\sqrt{R}}{\sqrt{2}}+1\right|\sqrt{2} = \sqrt{R}+\sqrt{2}.\end{aligned}$$

第 2 問 (1) $\mathrm{BC}=2\sqrt{2}$ であるから，この正四面体の 1 辺の長さは $2\sqrt{2}$ である．すべての面が正三角形であるから，この立体上の任意の頂点 X, Y, Z に対して

$$\overrightarrow{\mathrm{XY}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{XZ}} = 2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\cos 60^\circ = 4$$

が成り立つ．よって

$$\begin{aligned}&4=\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(x-3,y-5,z)\cdot(0,-2,2)=2y+2z+10 \quad \text{より} \quad z=y-3\\ &4=\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(x-3,y-5,z)\cdot(-2,-2,0)=-2x-2y+16 \quad \text{より} \quad x=6-y\end{aligned}$$

を得る．また，$\mathrm{AD}=2\sqrt{2}$ であるから，

$8=\mathrm{AD}^2=(3-y)^2+(y-5)^2+(y-3)^2=3y^2-22y+43$ より $(3y-7)(y-5)=0.$

$z>0$ より $y-3>0$ であるから，$y=5$ である．したがって，$x=1, y=5, z=2.$

(2) 正四面体の 1 つの面の面積は $2\sqrt{3}$ である．また，点 A から辺 BC に垂線をひき，BC との交点を H とすると，$\mathrm{AH}=\sqrt{6}$ である．正四面体の内接球は各面の重心で接するから，$\triangle\mathrm{ABC}$ の重心を G とすると，$\mathrm{HG}=\dfrac{1}{3}\mathrm{AH}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$．$\mathrm{DH}=\sqrt{6}$ であるから，三平方の定理より，$\mathrm{DG}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$．したがって，正四面体の体積 V は

$$V=\frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{3}=\frac{8}{3}.$$

となる．ここで，球 S の半径を r，中心を T とすると，立体の体積について

$$
\begin{aligned}
V &= (\text{四面体 TABC}) + (\text{四面体 TABD}) + (\text{四面体 TACD}) + (\text{四面体 TBCD}) \\
&= \frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{3}\cdot r\times 4 = \frac{8\sqrt{3}}{3}r
\end{aligned}
$$

である．したがって，$r = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

また，球 S の中心から平面までの距離は，正三角形 PQR を底面に見たときの四面体 TPQR の高さである．点 P, Q の座標はそれぞれ三角形の重心であって

$$P\left(\frac{7}{3}, \frac{11}{3}, \frac{2}{3}\right),\quad Q\left(\frac{5}{3}, \frac{13}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

であるから，$\mathrm{PQ} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ である．$\mathrm{TP} = r = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であったから，DG の長さと同様に求めると，求める距離は $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$.

(3) 直線 DT を x 軸，点 T を原点としてみると，求める体積は $y = \sqrt{\dfrac{1}{3} - x^2}$ と直線 $x = \dfrac{\sqrt{3}}{9}$ および x 軸によって囲まれた領域を x 軸の周りに 1 回転させて得られる立体の体積であるから，

$$\pi\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{-\frac{\sqrt{3}}{9}} \left(\sqrt{\frac{1}{3} - x^2}\right)^2 dx = \frac{28\sqrt{3}}{729}\pi.$$

第 3 問 (1) 奇数が書かれた玉は 5 つの中の 3 つだから，$P_1 = \dfrac{3}{5}$. また，$n \geqq 2$ のとき，n 回目の和が奇数になるためには，$n-1$ 回目までの和が奇数で，かつ n 回目に偶数を引くか，$n-1$ 回目までの和が偶数で，かつ n 回目に奇数を引けばよい．ここで，$n-1$ 回目までの和が奇数である確率は P_{n-1}, 偶数である確率は $1 - P_{n-1}$ と表せるから，

$$P_n = \frac{2}{5}P_{n-1} + \frac{3}{5}(1 - P_{n-1}) = -\frac{1}{5}P_{n-1} + \frac{3}{5}$$

が成り立つ．したがって，$\{P_n\}$ についての漸化式

$$P_{n+1} = -\frac{1}{5}P_n + \frac{3}{5},\quad P_1 = \frac{3}{5}$$

を得る．

(2) (1) で得られた漸化式は

$$P_{n+1} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{5}\left(P_n - \frac{1}{2}\right)$$

と変形できる．数列 $\{P_n - \dfrac{1}{2}\}$ は初項 $P_1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{10}$，公比 $-\dfrac{1}{5}$ の等比数列であるから，

$$P_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{10}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

ゆえに

$$P_n = \frac{1}{10}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}.$$

である．また，$\left|-\dfrac{1}{5}\right| < 1$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \frac{1}{2}.$$

(3) (2) より $\alpha = \dfrac{1}{2}$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{Q_k}{Q_n} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\frac{1}{10}(-\frac{1}{5})^{k-1}}{\frac{1}{10}(-\frac{1}{5})^{n-1}} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{(-5)^{n-1}}{(-5)^{k-1}} \right\}^{\frac{1}{n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \{(-5)^{n-k}\}^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (-5)^{1-\frac{k}{n}}$$

である．区分求積法を用いれば

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (-5)^{1-\frac{k}{n}} = \int_0^1 (-5)^{1-x}\, dx = \left[\frac{-(-5)^{1-x}}{\log 5} \right]_0^1 = \frac{4}{\log 5}.$$