演習問題

第１回

第１問 複素数 z に対して，z と共役な複素数を $\overline{z}$ で表すとする．次の問いに答えよ．

(1) 複素数 z が $z-\overline{z}=0$ を満たすとき，z は実数であることを示せ．

(2) 複素数 z と正の数 R に対し，複素数 α を

$$\alpha = z + \frac{R}{z}$$

で定める．α が実数となるような複素数 z の全体を，複素数平面上に図示せよ．

(3) (2) の条件を満たす複素数 z に対し，とくに複素数 z は実数ではないとする．このとき $|z-1-i|$ の最大値と最小値を R を用いて表せ．

第２問 O を原点とする座標空間において，正四面体 ABCD を考える．4 つの頂点の座標は

$$\mathrm{A}(3,5,0),\quad \mathrm{B}(1,3,0),\quad \mathrm{C}(3,3,2),\quad \mathrm{D}(x,y,z)\quad (z>0)$$

である．また，四面体 ABCD には球 S が内接している．次の問いに答えよ．

(1) x, y, z の値をそれぞれ求めよ．

(2) 球 S の半径を求めよ．また，球 S と 3 つの三角形 ABC, ABD, ACD が接する点をそれぞれ P, Q, R とするとき，この 3 点 P, Q, R によって定まる平面を α とする．球 S の中心から平面 α までの距離を求めよ．

(3) (2) の平面 α に対し，球 S を平面 α で 2 つの立体に分けたとき，小さい方の立体の体積を求めよ．

第３問 1 から 5 までの数字が 1 つずつ書かれた 5 個のカードが袋に入っている．この袋から 1 つのカードを取り出し，数字を記録してから袋に戻す試行を n 回行う．n 回目までに記録したすべての数の和が奇数になる確率を P_n とおく．次の問いに答えよ．

(1) P_1 を求めよ．また，P_{n+1} を P_n を用いて表せ．

(2) P_n を求め，その極限

$$\lim_{n\to\infty} P_n$$

を求めよ．

(3) (2) で求めた極限を α とし，数列 $\{Q_n\}$ を $Q_n = P_n - \alpha$ で定める．極限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{Q_k}{Q_n} \right)^{\frac{1}{n}}$$

を求めよ．