演習問題　解答

第２回

第１問 (1)

$$z = \frac{\sqrt{3}-1+(\sqrt{3}+1)i}{2(1+i)} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{2\sqrt{3}+2i}{2\cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

より，実部は $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，虚部は $\dfrac{1}{2}$.

(2) (1) の結果より

$$\left|\frac{z}{1+i}\right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$$

である．したがって

$$\frac{z}{1+i} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$$

一方，$|1+i| = \sqrt{2}$ より

$$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

であるから，

$$z = \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \cdot \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{12}\pi + i\sin\frac{5}{12}\pi\right).$$

(3) de Moivre の定理より

$$\begin{aligned} z^{12} &= \sqrt{2}^{12}\left(\cos\frac{5}{12}\pi + i\sin\frac{5}{12}\pi\right)^{12} = 2^6\cos\left(\frac{5}{12}\pi\cdot 12\right) + i\sin\left(\frac{5}{12}\pi\cdot 12\right) \\ &= 64(\cos 5\pi + i\sin 5\pi) = -64. \end{aligned}$$

第２問 (1) 与えられた極限の分母について

$$\lim_{t\to 3/2}(2t-3)\sqrt{a-(b-2)t} = 0 \times \sqrt{a - \frac{3}{2}(b-2)} = 0$$

であるから，分子の極限も 0 である．したがって，

$$\lim_{t\to 3/2}(a-bt) = 0 \qquad \text{より} \qquad b = \frac{2}{3}a.$$

これを極限の式に代入すれば

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 3/2}\frac{a-\frac{2}{3}at}{(3-2t)\sqrt{a-\left(\frac{2}{3}a-2\right)t}} &= \lim_{t\to 3/2}\frac{a}{3}\frac{3-2t}{(3-2t)\sqrt{a-\left(\frac{2}{3}a-2\right)t}} \\ &= \lim_{t\to 3/2}\frac{a}{3}\frac{1}{\sqrt{a-\left(\frac{2}{3}a-2\right)t}} \\ &= \frac{a}{3}\frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

この値が $\sqrt{3}$ になるから，$a=9$，$b=6$.

(2) (1) より $f(x)=\dfrac{9-6t}{\sqrt{9-4t}}$ である．$9-4t=u$ とおくと，$\dfrac{du}{dt}=-4$，$t=\dfrac{9-u}{4}$ であるから，C を積分定数として，

$$\int f(t)\,dt=\frac{3}{8}\int\left(\frac{3}{\sqrt{u}}-\sqrt{u}\right)du=\frac{\sqrt{u}}{4}(9-u)+C=t\sqrt{9-4t}+C$$

である．したがって

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt=x\sqrt{9-4x}\qquad\left(0<x<\frac{9}{4}\right).$$

(3) (2) の結果と条件 $x>0$ より，不等式 $F(x)\geqq 2$ は

$$\sqrt{9-4x}\geqq\frac{2}{x}$$

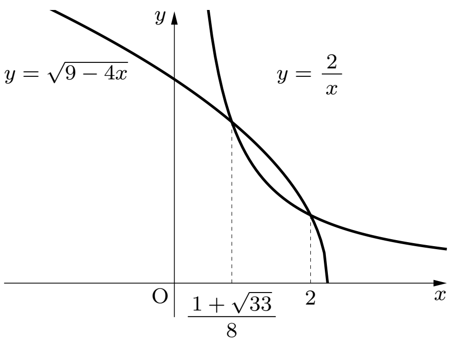
と変形できる．方程式 $\sqrt{9-4x}=\dfrac{2}{x}$ の $x>0$ を満たす解を調べる．両辺を 2 乗して整理すると

$$4x^3-9x^2+4=0$$

である．$x=2$ はこの方程式の解であるから，因数定理より，$4x^3-9x^2+4$ は $x-2$ で割り切れる．ゆえに整式の割り算によって，この方程式は

$$(x-2)(4x^2-x-2)=0$$

と変形できる．したがって方程式 $\sqrt{9-4x}=\dfrac{2}{x}$ の解は $x=2,\ \dfrac{1\pm\sqrt{33}}{8}$ の 3 つである．ここで，$x=\dfrac{1-\sqrt{33}}{8}$ は $x>0$ を満たさないので不適であることに注意すれば，$y=\sqrt{9-4x}$ と $y=\dfrac{2}{x}$ のグラフは $y\geqq 0$ の範囲でかくと下の図のようになる．



ゆえに求める x の値の範囲は $\dfrac{1+\sqrt{33}}{8}\leqq x\leqq 2$.（これは $0<x<\dfrac{9}{4}$ を満たす.）

第 3 問 (1)

$$I_0=\int_0^{\pi/2}dx=\frac{\pi}{2},\quad I_1=\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx=\Big[\sin x\Big]_0^{\pi/2}dx=1.$$

(2) 部分積分を用いると

$$\begin{aligned}I_{n+2}&=\int_0^{\pi/2}\cos^{n+2}x\,dx=\int_0^{\pi/2}\cos x\cos^{n+1}x\,dx=\int_0^{\pi/2}(\sin x)'\cos^{n+1}x\,dx\\&=\Big[\sin x\cos^{n+1}x\Big]_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}(n+1)\sin^2 x\cos^n x\,dx\\&=(n+1)\int_0^{\pi/2}\left(\cos^n x-\cos^{n+2}x\right)dx=(n+1)(I_n-I_{n+2})\end{aligned}$$

が成り立つ．右辺の I_{n+2} を移行して整理すれば示す等式を得る．

(3) (2) の結果を用いると，

$$I_7 = \frac{6}{7}I_5 = \frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}I_3 = \frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}I_1,$$

$$I_8 = \frac{7}{8}I_6 = \frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}I_4 = \frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}I_2 = \frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}I_0$$

であるから，

$$I_7 \times I_8 = \left(\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}I_1\right)\times\left(\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}I_0\right) = \frac{\pi}{16}.$$