演習問題　解答

第３回

第１問 (1) $y=x+k$ を E の方程式に代入して整理すると，x についての２次方程式

$$13x^2+18kx+9k^2-36=0 \qquad (\spadesuit)$$

となる．E と ℓ が異なる 2 点で交わるとき，この 2 次方程式の判別式

$$D=(18k)^2-4\cdot 13\cdot(9k^2-36)=4\cdot 4\cdot 9\cdot(13-k^2)$$

は正の値となる．したがって求める範囲は $-\sqrt{13}<k<\sqrt{13}$．また，方程式 $(\spadesuit)$ の異なる 2 つの実数解を $\alpha,\beta)$ とする．この値は E と ℓ の共有点の x 座標を表すから，共有点の座標は $(\alpha,\alpha+k)$, $(\beta,\beta+k)$ となる．したがって ℓ が E から切り取る線分の長さ L は

$$L=\sqrt{(\alpha-\beta)^2+\{(\alpha-k)-(\beta-k)\}^2}=\sqrt{2}\sqrt{(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{2}\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$$

である．ここで，方程式 $(\spadesuit)$ に対する解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-\frac{18}{13}k, \qquad \alpha\beta=\frac{9k^2-36}{13}$$

であるから，

$$L=\sqrt{2}\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{2}\sqrt{\frac{18^2}{13^2}k^2-\frac{4\cdot 9\cdot 13(k^2-4)}{13^2}}=\frac{12}{13}\sqrt{2(13-k^2)}.$$

(2) (1) の $(\spadesuit)$ において，$k=-\sqrt{13}$ とするとき，E は ℓ と点 $\left(\frac{9}{\sqrt{13}},-\frac{4}{\sqrt{13}}\right)$ で接する．この点が直線 ℓ との距離を最大とする．点と直線の距離の公式より，その距離 d は

$$d=\frac{\left|\frac{9}{\sqrt{13}}+\frac{4}{\sqrt{13}}+k\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(k+\sqrt{13})$$

となる．ただし，絶対値は $k\geqq 0$ に注意して外した．

(3) E および ℓ は原点で点対称である．したがって $k\geqq 0$ についてのみ考えればよい．三角形の頂点を A，B，C とし，E と ℓ の交点を B，C とすると，辺 BC は ℓ と平行である．辺 BC を高さとするとき，辺 BC までの距離が最大になるような E 上の点は (2) で求めたものと一致する．したがって，三角形の面積を $S(k)$ とすると

$$S(k)=\frac{1}{2}L\cdot d=\frac{6}{13}(\sqrt{13}+k)\sqrt{13-k^2}=\frac{6}{13}\sqrt{(\sqrt{13}-k)(\sqrt{13}+k)^3}$$

である．この最大値を求めればよい．$f(k)=(\sqrt{13}-k)(\sqrt{13}+k)^3$ とおくと，

$$f'(k)=2(\sqrt{13}+k)^2(\sqrt{13}-2k)$$

であるから，$k=\frac{\sqrt{13}}{2}$ で $f'(k)=0$ となる．増減表は

k	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{13}}{2}$	$\cdots$	$\sqrt{13}$
$f'(k)$		$+$	0	$-$	
$f(k)$		$\nearrow$	$\frac{13^2\cdot 3^3}{2^4}$	$\searrow$	

となるから，$k=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$ のとき，最大値 $\dfrac{6}{13}\sqrt{\dfrac{13^2\cdot 3^3}{2^4}}=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ をとる．

第 2 問 (1) $h(t)=\log(t+x)$ とおく．平均値の定理より

$$\frac{\log(a+x)-\log x}{a}=\frac{h(a)-h(0)}{a-0}=h'(c)=\frac{1}{c+x}$$

を満たす $0<c<a$ が存在する．$\dfrac{1}{a+x}<\dfrac{1}{c+x}<\dfrac{1}{x}$ であるから，

$$\frac{1}{a+x}<\frac{\log(a+x)-\log x}{a}<\frac{1}{x}$$

が成り立つ．

(2)

$$\log(a+x)-\log x=\log\left(\frac{a+x}{x}\right)=\log\left(1+\frac{a}{x}\right)$$

であるから，(1) の結果より

$$g(x)=\frac{a}{a+x}<\log(a+x)-\log x=\log\left(1+\frac{a}{x}\right)=f(x)$$

が成り立つ．したがって，求める面積は

$$S(t)=\int_1^t\left\{f(x)-g(x)\right\}dx$$

と表せる．ここで，部分積分により

$$\begin{aligned}\int_1^t f(x)\,dx=\int_1^t\log\left(1+\frac{a}{x}\right)dx&=\int_1^t(x)'\log\left(1+\frac{a}{x}\right)dx\\&=\left[x\log\left(1+\frac{a}{x}\right)\right]_1^t-\int_1^t x\cdot\frac{-\frac{a}{x^2}}{1+\frac{a}{x}}\,dx\\&=t\log\left(1+\frac{a}{t}\right)-\log(1+a)+\int_1^t\frac{a}{x+a}\,dx\\&=t\log\left(1+\frac{a}{t}\right)-\log(1+a)+\int_1^t g(x)\,dx\end{aligned}$$

であるから，

$$S(t)=\int_1^t\left\{f(x)-g(x)\right\}dx=\int_1^t f(x)\,dx-\int_1^t g(x)\,dx=t\log\left(1+\frac{a}{t}\right)-\log(1+a).$$

(3) (2) において

$$\log(a+x)-\log x=\log\left(1+\frac{a}{x}\right)$$

を示した．(1) の不等式において全辺を ax 倍すると，上の式と併せて

$$\frac{a}{\frac{a}{x}+1}=\frac{ax}{a+x}<x\log\left(1+\frac{a}{x}\right)<a$$

が成り立つ．したがって $x\to\infty$ の極限を考えると，はさみうちの原理より

$$\lim_{x\to\infty}x\log\left(1+\frac{a}{x}\right)=a$$

である．ゆえに

$$\lim_{t\to\infty}S(t)=\lim_{t\to\infty}\left(t\log\left(1+\frac{a}{t}\right)-\log(1+a)\right)=a-\log(1+a).$$

第 3 問 (1) $\{a_n\}$ の公比を r とすると，一般項は $a_n = a_1 r^{n-1}$ と表せる．したがって

$$8 = a_3 = a_1 r^2, \quad 64 = a_6 = a_1 r^5 \qquad \text{より} \qquad r^3 = 8$$

である．公比は実数であるから，$r = 2$ であって，$a_1 = \dfrac{a_3}{2^2} = 2$ より，一般項は $a_n = 2^n$．

(2) 【解答 1】

$$a_{n+4} - a_n = 2^n(2^4 - 1) = 10 \cdot 3 \cdot 2^{n-1}$$

であるから，$a_{n+4} - a_n$ は 10 の倍数である．したがって，a_{n+4} と a_n を 10 で割った余りは等しい．ゆえに $r_{n+4} = r_n$．

【解答 2】a_n を 10 で割った商を q_n とすると，

$$a_n = 10q_n + r_n \qquad (0 \leqq r_n < 9)$$

と表せる．ゆえに $r_{n+4} = a_{n+4} - 10q_{n+4}$ であり，

$$\begin{aligned} r_{n+4} - r_n &= (a_{n+4} - 10q_{n+4}) - (a_n - 10q_n) = 2^n \cdot 15 - 10(q_{n+4} - q_n) \\ &= 10\left\{3 \cdot 2^{n-1} - (q_{n+4} - q_n)\right\} \end{aligned}$$

が成り立つ．両辺の絶対値をとれば

$$|r_{n+4} - r_n| = 10\left|3 \cdot 2^{n-1} - (q_{n+4} - q_n)\right|$$

であるから，$|r_{n+4} - r_n|$ は 10 の倍数である．一方，$0 \leqq r_n < 9$ より $0 \leqq |r_{n+4} - r_n| < 9$ であるから，10 の倍数となるのは $|r_{n+4} - r_n| = 0$，すなわち $r_{n+4} = r_n$ の場合のみである．

(3) 計算によって

$$r_1 = 2, \quad r_2 = 4, \quad r_3 = 8, \quad r_4 = 6$$

である．(2) の結果より，$r_5 = 2, r_6 = 4, \cdots$ となる．以下，自然数 m を用いて場合分けする．

$n = 4m$ のとき，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} r_k = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{4m}\sum_{k=1}^{4m} r_k = \lim_{m\to\infty} \frac{m(2+4+8+6)}{4m} = 5$$

である．

$n = 4m - 1$ のとき，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} r_k = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{4m-1}\sum_{k=1}^{4m-1} r_k = \lim_{m\to\infty} \frac{m(2+4+8+6)-6}{4m-1} = 5$$

である．

$n = 4m - 2$ のとき，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} r_k = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{4m-2}\sum_{k=1}^{4m-2} r_k = \lim_{m\to\infty} \frac{m(2+4+8+6)-(8+6)}{4m-2} = 5$$

である．

$n = 4m - 3$ のとき，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} r_k = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{4m-3}\sum_{k=1}^{4m-3} r_k = \lim_{m\to\infty} \frac{m(2+4+8+6)-(4+8+6)}{4m-3} = 5$$

である．したがって，求める極限値は 5 である．