演習問題

第 3 回

第 1 問 方程式

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

で表される二次曲線を E とし，直線 $y = x + k$ を ℓ とする．

(1) k を実数とする．二次曲線 E と直線 ℓ が異なる 2 点で交わるとき，k の値の範囲を求めよ．また，このとき直線 ℓ が二次曲線 E から切り取る線分の長さを k を用いて表せ．

(2) $k \geqq 0$ とする．二次曲線 E 上の点で，直線 ℓ との距離が最大となる点を求め，その距離を k を用いて表せ．

(3) 二次曲線 E 上に 3 つの頂点を持ち，辺の 1 つが直線 ℓ と平行な三角形の面積の最大値を求めよ．

第 2 問 $a > 0$ とする．$x > 0$ において，関数 $f(x) = \log\left(1 + \dfrac{a}{x}\right)$，$g(x) = \dfrac{a}{x+a}$ を考える．

(1) 平均値の定理を用いて，$x > 0$ において，不等式

$$\frac{1}{a+x} < \frac{\log(a+x) - \log a}{x} < \frac{1}{a}$$

が成り立つことを示せ．

(2) $t > 1$ とする．$x > 0$ において $f(x) > g(x)$ であること示し，$y = f(x)$，$y = g(x)$ のグラフと直線 $x = 1$，$x = t$ によって囲まれた領域の面積 $S(t)$ を t の式で表せ．

(3) (2) の $S(t)$ に対し，$\displaystyle\lim_{t\to\infty} S(t)$ を求めよ．

第 3 問 数列 $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ は $a_3 = 8,\ a_6 = 64$ を満たす等比数列で，その公比は実数であるとする．

(1) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) 数列 $\{r_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ を

$$r_n = (a_n \text{ を } 10 \text{ で割った余り})$$

によって定める．このとき，$r_{n+4} = r_n$ であることを示せ．

(3) (2) の数列 $\{r_n\}$ に対し，極限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} r_k$$

を求めよ．