

演習問題 解答

第3回

第1問 (1)

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

であるから,

$$r^2 \sin 2\theta = 2r^2 \sin \theta \cos \theta = 2xy$$

したがって, 求める方程式は $xy = 1$.

(2) $y' = -\frac{1}{x^2}$ であるから, 点 P, Q での法線の傾きはそれぞれ a^2, b^2 で

$$\ell : y = a^2x - a^3 + \frac{1}{a} \quad (\heartsuit)$$

$$m : y = b^2x - b^3 + \frac{1}{b} \quad (\spadesuit)$$

これらの方程式から y を消去して

$$\begin{aligned} a^2x - a^3 + \frac{1}{a} &= b^2x - b^3 + \frac{1}{b} \\ (a^2 - b^2)x &= a^3 - b^3 + \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \\ (a+b)(a-b)x &= (a-b)(a^2 + ab + b^2) + \frac{a-b}{ab} \end{aligned}$$

ここで, $a, b > 0$, $a \neq b$ より $(a-b)(a+b) \neq 0$ であるから, 両辺に $\frac{1}{(a-b)(a+b)}$ を掛けて

$$x = \frac{a^2 + ab + b^2}{a+b} + \frac{1}{ab(a+b)}$$

$(\heartsuit) \times b^2 - (\spadesuit) \times a^2$ より

$$\begin{aligned} (b^2 - a^2)y &= -a^3b^2 + b^3a^2 + \frac{b^2}{a} - \frac{a^2}{b} \\ (b+a)(b-a)y &= a^2b^2(b-a) + \frac{b^3 - a^3}{ab} \\ (b+a)(b-a)y &= a^2b^2(b-a) + \frac{(b-a)(b^2 + ab + a^2)}{ab} \end{aligned}$$

両辺に $\frac{1}{(b-a)(b+a)}$ を掛けて

$$y = \frac{a^2b^2}{a+b} + \frac{a^2 + ab + b^2}{ab(a+b)}$$

したがって, 点 R の座標は

$$\left(\frac{a^2 + ab + b^2}{a+b} + \frac{1}{ab(a+b)}, \frac{a^2b^2}{a+b} + \frac{a^2 + ab + b^2}{ab(a+b)} \right)$$

(3) 点 Q が点 P に限りなく近づくとき, b は a に限りなく近づくから, (2) の結果より

$$\lim_{b \rightarrow a} x = \lim_{b \rightarrow a} \left(\frac{a^2 + ab + b^2}{a+b} + \frac{1}{ab(a+b)} \right) = \frac{3}{2}a + \frac{1}{2a^3}$$

$$\lim_{b \rightarrow a} y = \lim_{b \rightarrow a} \left(\frac{a^2 b^2}{a+b} + \frac{a^2 + ab + b^2}{ab(a+b)} \right) = \frac{1}{2} a^3 + \frac{3}{2a}$$

ゆえに求める座標は

$$\left(\frac{3}{2}a + \frac{1}{2a^3}, \frac{1}{2}a^3 + \frac{3}{2a} \right).$$

第2問 (1) $PF = 4 - PF'$ であるから,

$$\sqrt{(x - \sqrt{3})^2 + y^2} = 4 - \sqrt{(x + \sqrt{3})^2 + y^2}$$

が成り立つ. 両辺を2乗して整理すると

$$2\sqrt{(x + \sqrt{3})^2 + y^2} = \sqrt{3}x + 4$$

再び両辺を2乗して整理すると, 楕円の方程式

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

を得る. 逆に, この楕円上のすべての点は条件を満たす.

(2) (1) で求めた楕円上の点は, t を媒介変数として $x = 2 \cos t, y = \sin t$ ($0 \leq t < 2\pi$) と表せる. ゆえに

$$\begin{aligned} k &= x^2 - xy + 2y^2 = 4 \cos^2 t - 2 \sin t \cos t + 2 \sin^2 t \\ &= \cos 2t - \sin 2t + 3 = \sqrt{2} \sin \left(2t + \frac{3}{4}\pi \right) + 3 \end{aligned}$$

であるから, 最大値は (t の範囲を考慮すれば)

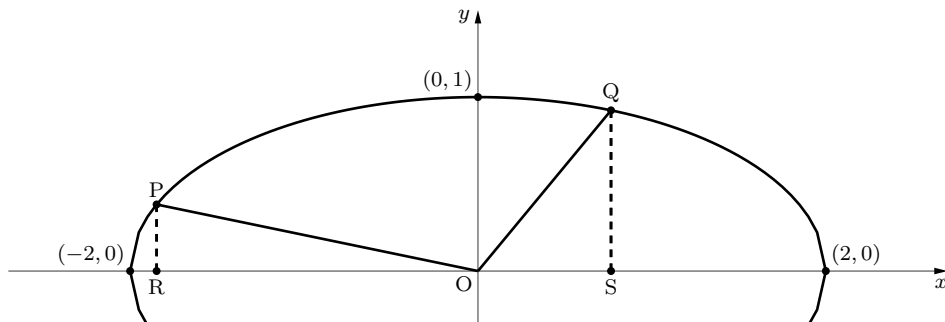
$$2t + \frac{3}{4}\pi = \frac{5}{2}\pi \quad \text{すなわち} \quad t = \frac{7}{8}\pi \quad \text{のとき} \quad k = 3 + \sqrt{2}$$

最小値は

$$2t + \frac{3}{4}\pi = \frac{3}{2}\pi \quad \text{すなわち} \quad t = \frac{3}{8}\pi \quad \text{のとき} \quad k = 3 - \sqrt{2}$$

である.

(3) (2) の結果より, $P\left(2 \cos \frac{7}{8}\pi, \sin \frac{7}{8}\pi\right), Q\left(2 \cos \frac{3}{8}\pi, \sin \frac{3}{8}\pi\right)$ である.



4点P, Q, R, Sで囲まれた領域の面積 S_1 は

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{2 \cos 7\pi/8}^{2 \cos 3\pi/8} y dx = \int_{7\pi/8}^{3\pi/8} y \frac{dx}{dt} dt = \int_{7\pi/8}^{3\pi/8} \sin t (-2 \sin t) dt \\ &= \int_{7\pi/8}^{3\pi/8} (\cos 2t - 1) dt = \left[\frac{1}{2} \sin 2t - t \right]_{7\pi/8}^{3\pi/8} = \frac{\pi + \sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

である。また、 $\triangle OQS$ の面積 S_2 は

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cos \frac{3}{8} \pi \cdot \sin \frac{3}{8} \pi = \frac{1}{2} \sin \frac{3}{4} \pi = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$\triangle OPR$ の面積 S_3 は

$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot \left(-2 \cos \frac{7}{8} \pi\right) \cdot \sin \frac{7}{8} \pi = -\frac{1}{2} \sin \frac{7}{4} \pi = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

である。以上より、求める面積 S は

$$S = S_1 - (S_2 + S_3) = \frac{\pi}{2}.$$

第 3 問 (1)

$$w = \frac{1}{4} \left(1 + \sqrt{3}i\right) = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$$

(2)

$$OA_1 = |z_1| = 1, \quad OA_2 = |z_2| = |wz_1| = |w||z_1| = \frac{1}{2},$$

である。また、複素数 αw は α の長さを $\frac{1}{2}$ し、角度を $\frac{3}{\pi}$ だけ回転させる。したがっ

て、求める面積は $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{8}$ 。

(3) 漸化式より、 $z_n = w^{n-1}z_1$ である。(1) と同様にして

$$OA_n = |z_n| = |w^{n-1}||z_1| = |w|^{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}, \quad OA_{n+1} = |z_{n+1}| = |w||z_n| = \frac{1}{2^n},$$

また、角度は (2) と同様に考えれば、

$$S_n = \frac{1}{2} \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{2^n} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{4^n}$$

である。これは等比数列であるから、求める級数は無限等比級数である。したがって公比の絶対値は 1 より小さいから収束して、

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$