演習問題

第４回

第１問 極方程式

$$r^2 \sin 2\theta = 2 \qquad (0 \leqq \theta < 2\pi)$$

で表される曲線を C とする．$a \neq b$ を満たす正の定数 a, b に対して，曲線 C 上の２点 P，Q は，それぞれ直交座標で x 座標が a, b の点であるとする．点 P，Q における曲線 C の法線をそれぞれ ℓ, m とし，２直線 ℓ, m の交点を R とする．

(1) 曲線 C の方程式を直交座標で表せ．

(2) 点 R の座標を a, b を用いて表せ．

(3) (2) の点 Q が点 P に限りなく近づくとき，点 R が限りなく近づく点の座標を求めよ．

第２問 ２点 $\mathrm{F}(\sqrt{3}, 0)$，$\mathrm{F}'(-\sqrt{3}, 0)$ に対して，$\mathrm{PF} + \mathrm{PF}' = 4$ を満たす点 $\mathrm{P}(x, y)$ の軌跡を T とする．

(1) 軌跡 T の方程式を求めよ．

(2) T 上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ に対して，$k = x^2 - xy + 2y^2$ の最大値と最小値を求めよ．

(3) (2) の k が最大となるときの点 P を Q，最小となるときの点 P を R とおく．線分 OQ，線分 OR および軌跡 T で囲まれた領域２つの領域のうち，小さい方の領域の面積を求めよ．

第３問 複素数 $w = \dfrac{1}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4} i$ に対して，数列 $\{z_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ を

$$z_1 = 1, \qquad z_{n+1} = w z_n$$

で定める．O を原点とする複素数平面上で，複素数 z_n が表す点を A_n とする．

(1) 複素数 w を極形式で表せ．

(2) $\triangle \mathrm{OA}_1\mathrm{A}_2$ の面積を求めよ．

(3) $\triangle \mathrm{OA}_n\mathrm{A}_{n+1}$ の面積を S_n とする．このとき，無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n$$

の収束・発散を調べよ．また，収束する場合はその和を求めよ．