演習問題　解答

第１回

第１問 (1) $P(x)$ に $x=1$ を代入すると

$$P(1)=1-2b-a(b-6)+2a(b-2)=1-2b+ab+2a$$

である．条件より $P(1)=b^2-b-1$ であるから

$$1-2b+ab+2a=b^2-b-1 \quad \text{より} \quad b^2+b(1-a)-2(1+a)=0$$

が成り立つ．b について，2 次方程式の解の公式より

$$b=\frac{-(1-a)\pm\sqrt{(1-a)^2+8(1+a)}}{2}=\frac{a-1\pm\sqrt{(a+3)^2}}{2}$$

ここで，$a>0$ より $a+3>0$ であるから，$\sqrt{(a+3)^2}=a+3$ であって，

$$b=\frac{a-1\pm(a+3)}{2}=a+1,\ -2$$

したがって，$b>0$ より，$b=a+1$ である（$a>0$ より $b=a+1>0$ である）．
また，上の結果より

$$P(x)=x^3-2(a+1)x^2-a(a-5)x+2a(a-1)$$

であり，$P(2)=8-8(a+1)-2a(a-5)+2a(a-1)=0$ である．

(2) $P(2)=0$ であるから，因数定理より $P(x)$ は $x-2$ で割り切れる．$P(x)$ を $x-2$ で割ると

$$P(x)=(x-2)(x^2-2ax-a^2+a)$$

である．$x^2-2ax-a^2+a=0$ が $x=2$ でない 2 つの異なる実数解を持てばよい．判別式 D について

$$D/4=(-a)^2-(-a^2+a)=2a^2-a=a(2a-1)>0$$

が成り立てばよいから，$a>0$ に注意して，$a>\dfrac{1}{2}$．また，$x=2$ が $x^2-2ax-a^2+a=0$ の解であるとき，

$$2^2-2a\cdot 2-a^2+a=-(a^2+3a-4)=-(a+4)(a-1)=0$$

より $a=-4,1$ であるから，題意より $a\neq 1$ である．以上より求める条件は

$$\frac{1}{2}<a<1,\ 1<a.$$

第 2 問 (1) $t^2=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=1+2\sin x\cos x$ であるから

$$\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$$

である．したがって

$$y=-2t\left(1-\frac{t^2-1}{2}\right)=t^3-3t.$$

(2) 三角関数の合成を用いて，

$$t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

とできる．

$$0\leqq x<2\pi \quad より \quad \frac{\pi}{4}\leqq x+\frac{\pi}{4}<2\pi+\frac{\pi}{4}$$

であるから，t の取りうる値の範囲は

$$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}.$$

(3) (2) で得られた式において，y を t について微分すると，

$$y'=3t^2-3=3(t+1)(t-1)$$

である．よって $y'=0$ となるのは $t=\pm1$ のとき．増減表は次のようになる．

t	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$-\sqrt{2}$

ここで，$t=1$ のとき，

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

であるから，

$$x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4} \quad ゆえに \quad x=0,\ \frac{\pi}{2}$$

同様に，$t=-1$ のとき，

$$x=\pi,\ \frac{3\pi}{2}$$

である．以上より

$$x=\pi,\ \frac{3\pi}{2}\ \ で最大値\ \ 2, \quad x=0,\ \frac{\pi}{2}\ \ で最小値\ \ -2$$

をとる．

第 3 問 (1) 点 A，点 B の座標を求める．

$(-t,2t,0)=\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-(t,0,0)$ より $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(0,2t,0)$ である．

ゆえに $\mathrm{A}(0,2t,0)$．同様に，$\mathrm{B}(0,0,3t)$ であるから，$\triangle\mathrm{OAP}$ を四面体の底面と考えれば

$$V(t)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot t\cdot 2t\right)\cdot 3t=t^3.$$

(2) $t > 0$ であるから，

$$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}| = \sqrt{(-t)^2 + (2t)^2} = \sqrt{5}t, \quad |\overrightarrow{\mathrm{PB}}| = \sqrt{(-t)^2 + (3t)^2} = \sqrt{10}t$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}} = (-t) \cdot (-t) = t^2$$

より

$$\cos\angle\mathrm{APB} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PB}}|} = \frac{t^2}{5\sqrt{2}t^2} = \frac{\sqrt{2}}{10},$$
$$\sin\angle\mathrm{APB} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{98}{100}} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

したがって

$$S(t) = \frac{1}{2}\mathrm{PA} \cdot \mathrm{PB} \cdot \sin\angle\mathrm{APB} = \frac{7}{2}t^2.$$

(3) 点 H の座標を (x, y, z) とおく．$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = (x, y, z)$ である．$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は $\triangle\mathrm{PAB}$ と垂直に交わるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{PA}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{PB}} \quad \text{すなわち} \quad \overrightarrow{\mathrm{OH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PA}} = 0, \quad \overrightarrow{\mathrm{OH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}} = 0$$

が成り立つ．したがって

$$0 = \overrightarrow{\mathrm{OH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PA}} = -tx + 2ty, \quad 0 = \overrightarrow{\mathrm{OH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}} = -tx + 3tz$$

であるから，$x = 2y = 3z$ を得る．よって，$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \left(x, \frac{1}{2}x, \frac{1}{3}x\right)$．ここで，四面体の底面を $\triangle\mathrm{PAB}$ と考えると，高さは OH であるから

$$t^3 = V(t) = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{2}t^2 \cdot \mathrm{OH} = \frac{7}{6}t^2 \cdot \mathrm{OH}$$

である．よって，$7 = \mathrm{OH} = |\overrightarrow{\mathrm{OH}}| = \frac{6}{7}t$．したがって，$t = \frac{49}{6}$．また，明らかに $x > 0$ であるから

$$49 = |\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2 = x^2 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}x^2 = \frac{49}{36}x^2 \quad \text{すなわち} \quad x = 6$$

よって，点 H の座標は $(6, 3, 2)$．

第 4 問 (1) $b_{n+1} = \log_2 8a_n^4 = \log_2 8 + \log_2 a_n^4 = 4\log_2 a_n + 3 = 4b_n + 3.$

(2) (1) で求めた $\{b_n\}$ についての漸化式は

$$b_{n+1} + 1 = 4(b_n + 1)$$

と変形できる．$\{c_n\}$ を $c_n = b_n + 1$ とすれば，

$$c_{n+1} = 4c_n, \quad c_1 = b_1 + 1 = \log_2 a_1 + 1 = \log_2 1 + 1 = 1$$

が成り立つ．$\{c_n\}$ は公比 4 の等比数列であるから，$c_n = 4^{n-1}$ である．ゆえに $b_n = 4^{n-1} - 1$.

(3) (2) より $a_n = 2^{b_n}$ である．$b_4 = 4^3 - 1 = 63$ であるから，$a_4 = 2^{63}$ となる．いま

$$\log_{10} a_4 = \log_{10} 2^{63} = 63 \log_{10} 2 = 63 \times 0.3010 = 18.963$$

であるから

$$18 < \log_{10} a_4 < 19 \quad \text{より} \quad 10^{18} < a_4 < 10^{19}$$

が成り立つ．したがって a_4 は 19 桁の数である[*1]．

[*1] $2^{63} = 2^{9\times 7} = 512^7 = 9223372036854775808$.