演習問題

第１回

第 1 問　a, b を正の定数とする．整式 $P(x) = x^3 - 2bx - a(b-6)x + 2a(b-2)$ を考える．いま，$P(x)$ は $P(1) = b^2 - b - 1$ を満たしているとする．

(1) b を a の式で表せ．また，$P(2)$ の値を求めよ．

(2) 方程式 $P(x) = 0$ が異なる 3 つの実数解を持つような a の値の範囲を求めよ．

第 2 問　関数 $y = -2(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) \quad (0 \leqq x < 2\pi)$ を考える．

(1) $t = \sin x + \cos x$ とおくとき，y を t の式で表せ．

(2) t の取りうる値の範囲を求めよ．

(3) y の最大値と最小値を求めよ．また，それを与える x の値を求めよ．

第 3 問　$t > 0$ とする．$\mathrm{O}(0, 0, 0)$ を原点とする座標空間上で，点 $\mathrm{P}(t, 0, 0)$ をとる．さらに，

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}} = (-t, 2t, 0), \quad \overrightarrow{\mathrm{PB}} = (-t, 0, 3t)$$

となるような 2 点 A，B を考える．

(1) 四面体 OPAB の体積 $V(t)$ を t の式で表せ．

(2) $\triangle\mathrm{PAB}$ の面積 $S(t)$ を t の式で表せ．

(3) 原点 O から $\triangle\mathrm{PAB}$ に垂線をおろし，その垂線と $\triangle\mathrm{PAB}$ の交点を H とする．$\mathrm{OH} = 7$ であるとき，t の値と点 H の座標を求めよ．

第 4 問　数列 $\{a_n\} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$ を漸化式 $a_{n+1} = 8a_n^4$，$a_1 = 1$ によって定める．

(1) $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対し，$b_n = \log_2 a_n$ とおく．b_{n+1} を b_n の式で表せ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) a_4 の桁数を求めよ．ただし，必要ならば $\log_{10} 2 = 0.3010$ を用いてよい．