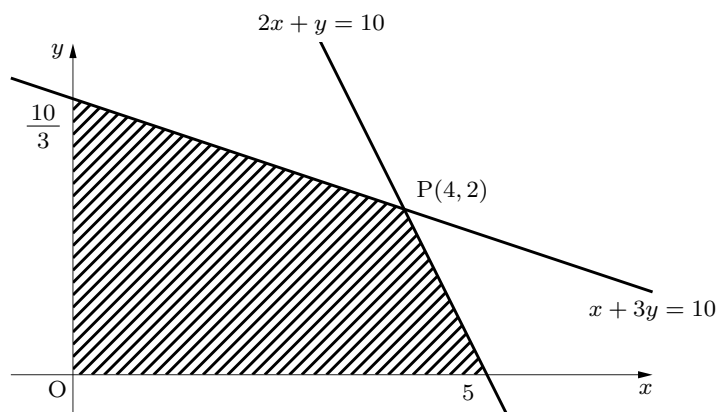


# 演習問題 解答

## 第2回

第1問 (1) 領域  $D$  は下図の斜線部. ただし, 境界線を含む.



- (2)  $x + y = k$  とおくと, これは傾き 1, 切片  $k$  の直線を表す. 切片  $k$  はこの直線が点  $O$  を通るときに最小値 0, 点  $P$  を通るときに最大値 6 をとる. したがって,  
 $x = 4, y = 2$  のとき, 最大値 6,  $x = y = 0$  のとき, 最小値 0 をとる.

第2問 (1)

$$t^2 = (2^x)^2 + 2 \cdot 2^x \cdot 2^{-x} + (2^{-x})^2 = 4^x + 4^{-x} + 2$$

より  $4^x + 4^{-x} = t^2 - 2$  である. また,

$$t^3 = (2^x)^3 + 3 \cdot (2^x)^2 \cdot 2^{-x} + 3 \cdot 2^x \cdot (2^{-x})^2 + (2^{-x})^3 = 8^x + 8^{-x} + 3(2^x + 2^{-x})$$

より  $8^x + 8^{-x} = t^3 - 3t$  であるから

$$y = t^3 - 3t - 9(t^2 - 2) + 27t - 18 = t^3 - 9t^2 + 24t$$

- (2)  $2^x, 2^{-x} > 0$  であるから, 相加平均と相乗平均の大小関係より

$$t = 2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$$

ゆえに  $t \geq 2$ .

- (3)  $y' = 3t^2 - 18t + 24 = 3(t^2 - 6t + 8) = 3(t - 2)(t - 4)$  であるから  $y' = 0$  となるのは  $t = 2, 4$  のとき. 増減表は次のようになる.

|      |    |     |    |     |
|------|----|-----|----|-----|
| $t$  | 2  | ... | 4  | ... |
| $y'$ | 0  | -   | 0  | +   |
| $y$  | 20 | ↘   | 16 | ↗   |

ここで、 $t = 4$  のとき  $2^x + 2^{-x} = 4$ .  $2^x = s$  とおけば

$$s + \frac{1}{s} = 4 \quad \text{であるから} \quad s^2 - 4s + 1 = 0 \quad \text{より} \quad s = 2 \pm \sqrt{3}$$

したがって、 $x = \log_2(2 \pm \sqrt{3})$  のとき、最小値 16 をとる.

第 3 問 (1)  $k$  を 0 でない実数とする. 方程式

$$x^2 + y^2 - 5 + k(x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1) = 0 \quad (\clubsuit)$$

は 2 つの円  $C_1, C_2$  の交点を通る図形を表す. この方程式が直線を表すとき,  
 $k = -1$  とすれば  $x^2, y^2$  の項が消えて

$$2x + 4y - 6 = 0 \quad \text{より} \quad x + 2y - 3 = 0$$

を得る.

- (2) (1) と同様に  $(\clubsuit)$  を考える. 点  $(-1, 0)$  を通るから  $x = -1, y = 0$  を  $(\clubsuit)$  に代入し

$$-4 + 4k = 0 \quad \text{より} \quad k = 1$$

を得る. この値を  $(\clubsuit)$  に代入しなおすと

$$x^2 + y^2 - 5 + x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$$

より

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2$$

である. これは点  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$  を中心とする半径  $\frac{\sqrt{13}}{2}$  の円を表す.

- (3) 点 A, B の座標を求める. この 2 点は (1) で求めた直線  $x + 2y - 3 = 0$  と円  $C_1$  の交点でもあるから,  $x = 3 - 2y$  を用いて  $C_1$  の方程式から  $x$  を消去すると

$$(3 - 2y)^2 + y^2 = 5 \quad \text{より} \quad (5y - 2)(y - 2) = 0 \quad \text{であるから} \quad y = 2, \frac{2}{5}$$

を得る.  $x = 3 - 2y$  より, A, B の座標は  $A(-1, 2)$ ,  $B\left(\frac{11}{5}, \frac{2}{5}\right)$  である. 点 P の座標を  $(s, t)$  とおく.  $\triangle PAB$  の重心の座標  $(x, y)$  は

$$x = \frac{1}{3}\left(s - 1 + \frac{11}{5}\right), y = \frac{1}{3}\left(t + \frac{12}{5}\right) \quad \text{より} \quad s = 3x - \frac{6}{5}, t = 3y - \frac{12}{5}$$

を満たす. また, P は円  $C_3$  上であるから

$$\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + (t - 1)^2 = \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2$$

が成り立つ. したがって求める軌跡の方程式は

$$\left(3x - \frac{6}{5} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(3y - \frac{12}{5} - 1\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2$$

である．両辺に  $(1/3)^2$  をかけて

$$\left(x - \frac{17}{30}\right)^2 + \left(y - \frac{17}{15}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{13}}{6}\right)^2$$

となるから，これは中心  $\left(\frac{17}{30}, \frac{17}{15}\right)$ ，半径  $\frac{\sqrt{13}}{6}$  の円周である．逆に，この円周上のすべての点は題意を満たす．

第4問 (1)

$$|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = \sqrt{6}, \quad \vec{OA} \cdot \vec{OB} = -3$$

であるから

$$\cos \angle AOB = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{|\vec{OA}| |\vec{OB}|} = -\frac{1}{2}$$

である．したがって  $\angle OAB = 120^\circ$  であるから

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} |\vec{OA}| |\vec{OB}| \sin 120^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

(2)  $C(x, y, z)$  ( $x > 0$ ) とおく．

$$\vec{AC} = (x, y, z) - (1, -2, 1) = (x-1, y+2, z-1)$$

$$\vec{BC} = (x, y, z) - (-2, 1, 1) = (x+2, y-1, z-1)$$

であるから， $|\vec{OC}| = |\vec{AC}| = |\vec{BC}|$  より

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$$

が成り立つ．整理すると

$$x - 2y + z - 3 = 0, \quad 2x - y - z + 3 = 0 \quad \text{より} \quad x = y, \quad z = 3 + x$$

を得る．ゆえに  $C(x, x, 3+x)$  ( $x > 0$ ) である．点 C から  $\triangle OAB$  に垂線を下ろし，その交点を  $H(p, q, r)$  とする．H は  $\triangle OAB$  上であるから，実数  $s, t$  を用いて

$$(p, q, r) = \vec{OH} = s\vec{OA} + t\vec{OB} = (s-2t, -2s+t, s+t)$$

が成り立つ．これより  $r = -p - q$  である．また，

$$0 = \vec{CH} \cdot \vec{OA} = p - 2q + r - 3 = -3q - 3$$

$$0 = \vec{CH} \cdot \vec{OB} = -2p + q + r - 3 = -3p - 3$$

より  $p = q = -1$  が判るから， $r = 2$  と併せて， $H(-1, -1, 2)$  である．ゆえに  $x+1 > 0$  に注意すれば  $|\vec{CH}| = \sqrt{3}(x+1)$  を得る．四面体 OABC の体積について

$$3 = \frac{1}{3} \cdot \triangle OAB \cdot |\vec{CH}| = \frac{3}{2}(x+1)$$

であるから  $x = 1$  が判り， $C(1, 1, 4)$  である．

- (3) 四面体 OABP の体積が最大となるのは、点 P から  $\triangle OAB$  に下ろした垂線が球  $S$  の中心  $C$  を通るときである．球  $S$  の半径は  $|\vec{OC}| = 3\sqrt{6}$  であるから、求める体積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} \cdot \triangle OAB \cdot (|\vec{CH}| + |\vec{HP}|) &= \frac{\sqrt{3}}{2} (2\sqrt{3} + |\vec{OC}|) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} (2\sqrt{3} + 3\sqrt{6}) \\ &= 3(1 + \sqrt{2}).\end{aligned}$$