

演習問題

第2回

第1問 次の連立方程式が表す領域を D とする.

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad 2x + y \leq 10, \quad x + 3y \leq 10$$

- (1) 領域 D を図示せよ.
- (2) 点 $P(x, y)$ が領域 D 内を動くとき, $x + y$ の最大値と最小値を求めよ.

第2問 関数 $y = 8^x + 8^{-x} - 9(4^x + 4^{-x}) + 27(2^x + 2^{-x}) - 18$ を考える.

- (1) $t = 2^x + 2^{-x}$ とおくとき, y を t の式で表せ.
- (2) t の取りうる値の範囲を求めよ.
- (3) y の最小値を求めよ. また, それを与える x の値を求めよ.

第3問 異なる2点で交わる2つの円 $C_1 : x^2 + y^2 = 5$ と $C_2 : x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ を考える. 2つの交点を, x 座標の値が大きい方から A, B とする.

- (1) 2点 A, B を通る直線の方程式を求めよ.
- (2) 2点 A, B を通り, さらに点 $(-1, 0)$ を通る円の方程式を求めよ.
- (3) (2) で求めた円を C_3 とする. 点 P が C_3 の円周上を動くとき, $\triangle PAB$ の重心の軌跡を求めよ.

第4問 O を原点とする座標空間上に点 $A(1, -2, 1)$, 点 $B(-2, 1, 1)$ をとる.

- (1) $\triangle OAB$ の面積を求めよ.
- (2) x 座標が0より大きい点 C を中心とし, 3点 O, A, B を通る球面を S とする. 四面体 $OABC$ の体積が3であるとき, 点 C の座標を求めよ.
- (3) (2) の条件のもとで, 点 P が球面 S 上を動くとする. 四面体 $OABP$ の体積の最大値を求めよ.