演習問題　解答

第 3 回

第 1 問 (1)

$$c_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} = 7(a_n + b_n) = 7c_b$$

である．また，$c_1 = a_1 + b_1 = 3$ であるから，$\{c_n\}$ は初項 3，公比 7 の等比数列で，

$$c_n = 3 \cdot 7^{n-1}$$

(2)

$$a_{n+1} = 3a_n + 2b_n = 3a_n + 2(c_n - a_n) = a_n + 2c_n = a_n + 6 \cdot 7^{n-1}$$

が成り立つ．これより，$\{a_n\}$ は $\{6 \cdot 7^{n-1}\}$ を階差数列にもつことが判るから，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 6 \cdot 7^{k-1} = 2 + 6 \cdot \frac{7^{n-1} - 1}{7 - 1} = 7^{n-1} + 1$$

である．これは $n = 1$ のときも成り立つ．

第 2 問 (1) 三倍角の公式

$$\begin{aligned}\cos 3x = \cos(x + 2x) &= \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x \\ &= \cos x(2\cos^2 x - 1) - \sin x \cdot 2\sin x \cos x \\ &= \cos x(2\cos^2 x - 1) - 2\sin^2 x \cos x \\ &= \cos x(2\cos^2 x - 1) - 2(1 - \cos^2 x)\cos x \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x\end{aligned}$$

が成り立つことに注意して，

$$y = \cos 3x - 6\cos x = 4\cos^3 x - 3\cos x - 6\cos x = 4\cos^3 x - 9\cos x = 4t^3 - 9t$$

(2) $0 \leqq x < 2\pi$ より，$-1 \leqq t \leqq 1$．

(3) $y' = 12t^2 - 9 = 3(4t^2 - 3) = 3(2t - \sqrt{3})(2t + \sqrt{3})$．よって $y' = 0$ となるのは $t = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき．増減表は次のようになる．

t	-1	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	1
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	5	$\nearrow$	$3\sqrt{3}$	$\searrow$	$-3\sqrt{3}$	$\nearrow$	-5

ここで $t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，$\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より $x=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{11\pi}{6}$ であり，同様にして $t=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき $x=\dfrac{5\pi}{6},\ \dfrac{7\pi}{6}$．ゆえに

$$x=\frac{5\pi}{6},\ \frac{7\pi}{6}\ \text{で最大値}\ 3\sqrt{3},\quad x=\frac{\pi}{6},\ \frac{11\pi}{6}\ \text{で最小値}\ -3\sqrt{3}\quad \text{をとる．}$$

第 3 問 (1) 【解法 1】 $(*)$ は実数係数方程式であるから，$1-i$ が解であるとき，その共役な複素数 $1+i$ も解である．

$$(1-i)+(1+i)=2,\quad (1-i)(1+i)=2$$

より，方程式 $x^2-2x+2=0$ は $x=1\pm i$ を解に持つ．ゆえに $(*)$ の左辺は x^2-2x+2 で割り切れる．整式の除法によって

$$x^3+ax^2+bx+2=(x^2-2x+2)(x+a+2)+(2a+b+2)x-2a-2$$

が成り立つが，この余りは x に依らず 0 であるから，$2a+b+2=(-2a-2)=0$ より $a=-1, b=0$ である．

【解法 2】 $x=1-i$ を $(*)$ に代入して展開し，実部と虚部に分けて整理すると

$$0=(1-i)^3+a(1-i)^2+b(1-i)+2=b+(-2-2a-b)i$$

となる．実部と虚部を比較して $b=-2-2a-b=0$ であるから，$a=-1, b=0$ である．

(2)【解法 1 のとき】$-(a+2)=-1$ であるから，整式の除法の結果より，$x=-1\pm i,\ 1$.

【解法 2 のとき】 $P(x)=x^3-x^2+2$ とおくと，$(*)$ は $P(x)=0$ と表すことができる．計算により $P(-1)=0$ が判るから，因数定理より $P(x)$ は $x+1$ で割り切れる．実際，整式の除法によって

$$P(x)=(x+1)(x^2-2x+2)$$

であるから，解は $x=-1,\ 1\pm i$ である．

(3) 3 次方程式の解と係数の関係より

$$\alpha+\beta+\gamma=1,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0,\quad \alpha\beta\gamma=-2$$

である．したがって

$$(\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)+(\gamma+\alpha)=2(\alpha+\beta+\gamma)=2$$

$$\begin{aligned}&(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)+(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)+(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)\\&=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\\&=(\alpha+\beta+\gamma)^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\\&=1\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) &= (1-\gamma)(1-\alpha)(1-\beta) \\
&= 1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma \\
&= 2
\end{aligned}
$$

であるから，解と係数の関係より，求める方程式は

$$x^3-2x^2+x-2=0$$

※本問は $\alpha+\beta, \beta+\gamma, \gamma+\alpha$ が容易に計算できるため，上の値を直接計算するか，あるいは (1) の解法 1 と同様の議論で直接方程式を求めてもよい．

第 4 問 (1) $y'=2x$ より，$x=a$ における C の接線の傾きは $2a$．ℓ は接線と直交する（垂直に交わる）から，ℓ の傾きを m とすると

$$2a\cdot m=-1 \quad \text{より} \quad m=-\frac{1}{2a} \quad (a\neq 0)$$

したがって ℓ の方程式は

$$y-a^2=-\frac{1}{2a}(x-a) \quad \text{より} \quad y=-\frac{1}{2a}x+a^2+\frac{1}{2}$$

(2) ℓ と C の交点の x 座標は，2 つのグラフを表す式から y を消去した 2 次方程式

$$x^2=-\frac{1}{2a}x+a^2+\frac{1}{2}$$

の解である．両辺に $2a$ をかけて整理すると

$$2ax^2+x-a(2a^2+1)=0$$

であるが，ℓ と C は点 A で交わっているから，$x=a$ はこの方程式の 1 つの解になっていることに注意して左辺を因数分解すると

$$(x-a)(2ax+2a^2+1)=0$$

となる．したがって，点 B の x 座標は $x=-\dfrac{2a^2+1}{2a}$．これを $y=x^2$ に代入して y 座標も求めると，

$$\mathrm{B}\left(-\frac{2a^2+1}{2a}, \frac{(2a^2+1)^2}{4a^2}\right)$$

(3) 求める面積を $S(a)$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
S(a) &= \int_{-\frac{2a^2+1}{2a}}^{a}\left(-\frac{1}{2a}x+a^2+\frac{1}{2}-x^2\right)dx \\
&= \frac{1}{6}\left\{a-\left(-\frac{2a^2+1}{2a}\right)\right\}^3=\frac{1}{6}\left(2a+\frac{1}{2a}\right)^3
\end{aligned}
$$

である．$a>0$ であるから，$2a>0$, $\dfrac{1}{2a}>0$ が成り立つ．ゆえに，相加平均と相乗平均の大小関係を用いて

$$2a+\frac{1}{2a}\geqq 2\sqrt{2a\cdot\frac{1}{2a}}=2$$

で，等号成立は $2a = \dfrac{1}{2a} \quad (a > 0)$，すなわち $a = \dfrac{1}{2}$ のときである．したがって，求める面積の最小値は

$$a = \frac{1}{2} \quad \text{のとき} \quad \frac{1}{6} \cdot 2^3 = \frac{4}{3}.$$

※ $S(a)$ の積分の計算では，$\dfrac{1}{6}$ 公式

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

を用いた．