演習問題　解答

第4回

第1問 (1)

$$f(0) = 0^2 - \int_0^0 g(t)\,dt = 0$$

である．また，

$$g(x) = x + \int_0^1 f(t)\,dt = x + A$$

であるから

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - \int_0^x g(t)\,dt = x^2 - \int_0^x (x+A)\,dx \\ &= x^2 - \left[\frac{1}{2}t^2 + At\right]_0^x = \frac{1}{2}x^2 - Ax. \end{aligned}$$

(2) (1) の結果より

$$A = \int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}t^2 - At\right)\,dx = \left[\frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{2}At^2\right]_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}A$$

が成り立つから，$A = \dfrac{1}{9}$ を得る．したがって

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{9}x, \quad g(x) = x + \frac{1}{9}.$$

第2問 (1) 指数法則，対数の性質 および 底の変換公式を用いると，

$$\log_{27} x = \frac{\log_3 x}{\log_3 27} = \frac{\log_3 x}{3}$$

$$\log_9 \sqrt[6]{x} = \log_9 x^{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}\log_9 x = \frac{1}{6}\cdot\frac{\log_3 x}{\log_3 9} = \frac{\log_3 x}{12}$$

$$\log_3 \frac{x}{27} = \log_3 x - \log_3 27 = \log_3 x - 3$$

であるから，

$$\begin{aligned} y &= (36\log_{27} x)(\log_9 \sqrt[6]{x})(\log_3 27x) \\ &= 36\cdot\frac{\log_3 x}{3}\cdot\frac{\log_3 x}{12}(\log_3 x - 3) = t^2(t-3) = t^3 - 3t^2 \end{aligned}$$

(2) 底が 1 より大きいから

$$1 \leqq x \leqq 81 \quad \text{のとき} \quad \log_3 1 \leqq \log_3 x \leqq \log_3 81$$

が成り立つ．ゆえに $0 \leqq t \leqq 4$.

(3) $y' = 3t^2 - 6t = 3t(t-2)$ であるから $y' = 0$ となるのは $t = 0, 2$ のときであり，増減表は次のようになる．

t	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
y'	0	$-$	0	$+$	
y	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	16

ここで，$t = 2$ のとき，$\log_3 x = 2$ より $x = 9$．同様に $t = 4$ のとき $x = 81$ であるから，$x = 81$ で最大値 16，$x = 9$ で最小値 -4 をとる．

第 3 問 $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c}$ とおく．

(1) 【解法 1】 点 P は線分 BN を内分するから，$0 < s < 1$ なる実数 s を用いて $\mathrm{BP} : \mathrm{PN} = s : 1-s$ とできる．したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + s\overrightarrow{\mathrm{BN}} = \vec{b} + s(\overrightarrow{\mathrm{AN}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}) = (1-s)\vec{b} + \frac{1}{2}s\vec{c}$$

である．同様に，$0 < t < 1$ なる実数 t を用いて $\mathrm{CP} : \mathrm{PM} = t : 1-t$ とできるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} + t\overrightarrow{\mathrm{CM}} = \vec{c} + t(\overrightarrow{\mathrm{AM}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}) = \frac{3}{5}t\vec{b} + (1-t)\vec{c}$$

が成り立つ．いま $\vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{c} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \not\parallel \vec{c}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ の表し方はただ 1 通りである．したがって

$$1 - s = \frac{3}{5}t, \quad \frac{1}{2}s = 1 - t \quad \text{より} \quad s = \frac{4}{7}, t = \frac{5}{7}$$

である．ゆえに

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{3}{7}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{2}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

また，A，P，Q は一直線上にあるから，0 でない実数 k を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = k\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{3}{7}k\vec{b} + \frac{2}{7}k\vec{c}$$

と表せる．一方，Q は線分 BC を内分するから，$0 < u < 1$ なる実数 u を用いて $\mathrm{BQ} : \mathrm{QC} = u : 1-u$ とできる．したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = u\vec{b} + (1-u)\vec{c}$$

と表せる．$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ の表し方はただ 1 通りであるから，

$$u = \frac{3}{7}k, \quad 1 - u = \frac{2}{7}k \quad \text{より} \quad k = \frac{7}{5}$$

である．ゆえに

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \frac{7}{5}\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}.$$

【解法 2】Menelaus の定理より，

$$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{MB}} \cdot \frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}} \cdot \frac{\mathrm{CN}}{\mathrm{NA}} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}} = \frac{2}{3}$$

であるから，点 Q は辺 BC を $2:3$ に内分している．したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \frac{3\,\overrightarrow{b} + 2\,\overrightarrow{c}}{2+3} = \frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}.$$

Ceva の定理より，

$$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{MB}} \cdot \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CQ}} \cdot \frac{\mathrm{QP}}{\mathrm{PA}} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\mathrm{QP}}{\mathrm{PA}} = \frac{2}{5}$$

であるから，点 P は線分 AQ を $5:2$ に内分している．したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{5}{5+2}\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \frac{3}{7}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{2}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}}.$$

(2) 始点を P に合わせて整理すると，

$$\overrightarrow{0} = p\overrightarrow{\mathrm{AP}} + q(\overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}) + r(\overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}})$$

より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{q}{p+q+r}\overrightarrow{b} + \frac{r}{p+q+r}\overrightarrow{c}$$

(1) で求めた $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と比較して

$$\frac{q}{p+q+r} = \frac{3}{7}, \quad \frac{r}{p+q+r} = \frac{2}{7} \quad \text{より} \quad p:q:r = 2:3:2 \quad \text{を得る．}$$

(3) $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を S とおく．線分と面積の比の関係から

$$\begin{aligned}
\triangle\mathrm{PBC} &= \frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{AQ}}\triangle\mathrm{ABC} = \frac{2}{7}\mathrm{S} \\
\triangle\mathrm{PCA} &= \triangle\mathrm{AQC} - \triangle\mathrm{PQC} = \frac{\mathrm{QC}}{\mathrm{BC}}\triangle\mathrm{ABC} - \frac{\mathrm{QC}}{\mathrm{BC}}\triangle\mathrm{PBC} \\
&= \frac{3}{5}S - \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{7}S = \frac{3}{7}S \\
\triangle\mathrm{PAB} &= \triangle\mathrm{AQB} - \triangle\mathrm{PQB} = \frac{\mathrm{QB}}{\mathrm{BC}}\triangle\mathrm{ABC} - \frac{\mathrm{QB}}{\mathrm{BC}}\triangle\mathrm{PBC} \\
&= \frac{2}{5}S - \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{7}S = \frac{2}{7}S
\end{aligned}$$

したがって

$$\text{面積比 } \triangle\mathrm{PBC} : \triangle\mathrm{PCA} : \triangle\mathrm{PAB} = \frac{2}{7}S : \frac{3}{7}S : \frac{2}{7}S = 2:3:2.$$

第 4 問 (1) 放物線の方程式に $x = -\sqrt{2}$ を代入すると，$y = \sqrt{2}$ であるから，点 A は放物線 P 上にある．$y' = 2x + 2\sqrt{2} - 1$ より，接線の傾きは -1 である．したがって求める方程式（点 A における P の接線の方程式）は

$$y - \sqrt{2} = -1(x + \sqrt{2}) \quad \text{より} \quad y = -x.$$

(2) 直線 OA は (1) で求めた接線である．したがって囲まれた領域は中心角 $\dfrac{\pi}{4}$ の扇形であり，その面積は

$$\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}.$$

(3) 放物線 P と直線 OA，OB で囲まれた領域の面積を求める．△OAB の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot\sin\angle\mathrm{AOB}=\sqrt{2}$$

である．また，直線 AB と放物線 P で囲まれた領域の面積は

$$\int_{-\sqrt{2}}^{0}(x^2-(2\sqrt{2}-1)x+2)\,dx=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

である．したがって 放物線 P と円 C で囲まれた領域の面積は

$$\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{3}=\frac{\pi}{2}-\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$