演習問題

第 4 回

第 1 問 2 次関数 $f(x)$ と 1 次関数 $g(x)$ は次の式を満たすとする．

$$f(x) = x^2 - \int_0^x g(t)\,dt, \quad g(x) = x + \int_0^1 f(t)\,dt$$

(1) $f(0)$ を求めよ．また，$\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = A$ とおくとき，$f(x)$ を A を用いて表せ．

(2) $f(x)$，$g(x)$ をそれぞれ求めよ．

第 2 問 関数 $y = (36\log_{27} x)(\log_9 \sqrt[6]{x})\left(\log_x \dfrac{3}{27}\right)$ を考える．

(1) $t = \log_3 x$ とおくとき，y を t の式で表せ．

(2) t の取りうる値の範囲を求めよ．

(3) y の最大値と最小値を求めよ．また，それを与える x の値を求めよ．

第 3 問 $\triangle$ABC において，線分 AB を $3:2$ に内分する点を M，線分 AC の中点を N とする．また，直線 BN と直線 CM の交点を P，直線 AP と直線 BC の交点を Q とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}, \overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ をそれぞれ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ．

(2) $p\overrightarrow{\mathrm{AP}} + q\overrightarrow{\mathrm{BP}} + r\overrightarrow{\mathrm{CP}} = \overrightarrow{0}$ を満たす 0 でない実数 p, q, r に対し，比 $p:q:r$ を求めよ．

(3) 面積比 $\triangle\mathrm{PBC} : \triangle\mathrm{PCA} : \triangle\mathrm{PAB}$ を求めよ．

第 4 問 $\mathrm{O}(0,0)$ を原点とする座標平面上で，放物線 $P : x^2 + (2\sqrt{2} - 1)x + 2$，円 $C : x^2 + y^2 = 4$，点 $\mathrm{A}(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$，点 $\mathrm{B}(0,2)$ を考える．

(1) 放物線 P の $x = -\sqrt{2}$ における接線の方程式を求めよ．

(2) 直線 OA，直線 OB，円 C で囲まれた扇形の面積を求めよ．

(3) 放物線 P と円 C によって囲まれた領域の面積を求めよ．