演習問題　解答

第 1 回

第 1 問 (1) α は方程式 $x^2+3x-1=0$ の解であるから，(∗)　$\alpha^2+3\alpha-1=0$ が成り立つ．したがって

$$\alpha^2+3\alpha=1$$

である．また，この方程式に $x=0$ を代入しても成り立たないから，$x=0$ は解ではない．ゆえに $\alpha\neq 0$ であるから，(∗) の両辺を $1/\alpha$ 倍して

$$\alpha+3-\frac{1}{\alpha}=0 \qquad \text{より} \qquad \alpha-\frac{1}{\alpha}=-3.$$

(2) (1) の結果から

$$\alpha^4+3\alpha^3=\alpha^2(\alpha^2+3\alpha)=\alpha^2$$

である．また，$1-3\alpha=\alpha^2$，$\dfrac{1}{\alpha}=\alpha+3$ であるから

$$\frac{3\alpha}{1-3\alpha}=\frac{3\alpha}{\alpha^2}=\frac{3}{\alpha}=3(\alpha+3)=3\alpha+9$$

が成り立つ．したがって

$$\alpha^4+3\alpha^3+\frac{3\alpha}{1-3\alpha}=\alpha^2+3\alpha+9=10.$$

第 2 問 問題文から次のような表をかく．下線のついている値は計算して埋めたものである．

	男子	女子	計
好き	14	$\underline{7}$	21
嫌い	$\underline{8}$	$\underline{11}$	$\underline{19}$
計	22	18	40

表より，数学が嫌いな女子の人数は 11 人である．したがって確率は $\dfrac{11}{40}$.

(2) クラスから 1 人選んだときに女子が選ばれるという事象を A，数学が嫌いな生徒が選ばれるという事象を B とし，事象 X の起こる確率を $P(X)$ と表すと，

$$P(A)=\frac{18}{40},\quad P(A\cap B)=\frac{11}{40}$$

である．ここで，$A\cap B$ は数学が嫌いな女子が選ばれるという事象を表す．女子が選ばれるという条件のもとで，その女子が数学が嫌いであるという条件付き確率 $P_A(B)$ は

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{11}{18}$$

※あるいは，表から直接確率を計算してもよい．

第 3 問 (1) $1 < 2 < 4$ であるから $1 < \sqrt{2} < 2$ である．ゆえに $\sqrt{2} - 2 < 0$ となるから

$$|\sqrt{2}+1| = \sqrt{2}+1, \qquad |\sqrt{2}-2| = -(\sqrt{2}-2) = 2-\sqrt{2}$$

である．したがって

$$f(\sqrt{2}) = |\sqrt{2}+1| - 2|\sqrt{2}-2| = \sqrt{2}+1-2(2-\sqrt{2}) = 3\sqrt{2}-3.$$

(2) 絶対値の中の正負によって場合分けすると

$$f(x) = \begin{cases} x-5 & (x < -1) \\ 3x-3 & (-1 \leqq x \leqq 2) \\ -x+5 & (2 < x) \end{cases}$$

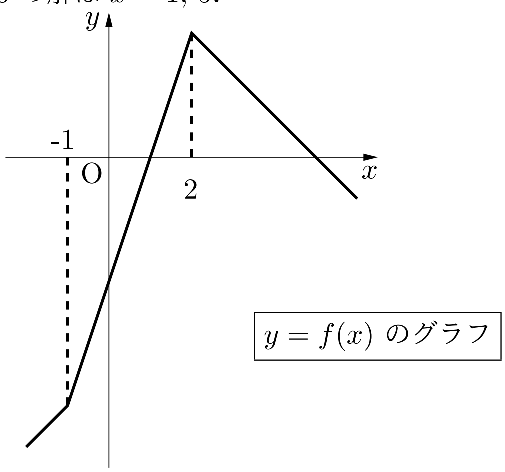
となるから，$y = f(x)$ のグラフを考えれば，$x = 2$ のとき最大値 3 をとる．

(3) グラフより，$y = f(x)$ は $-1 \leqq x \leqq 2$ と $2 < x$ で x 軸と交わることが判るから，

$$3x - 3 = 0 \quad \text{より} \quad x = 1. \quad （これは\ -1 \leqq x \leqq 2\ を満たす）$$

$$-x + 5 = 0 \quad \text{より} \quad x = 5. \quad （これは\ 2 < x\ を満たす）$$

である．ゆえに $f(x) = 0$ の解は $x = 1, 5$.



第 4 問 (1) 直角三角形 ABC に対する三平方の定理より，$\mathrm{AC} = \sqrt{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2} = 2$．また，$\triangle\mathrm{ADC}$ の辺の比は $1 : 1 : \sqrt{2}$ であるから，$\triangle\mathrm{ADC}$ も直角三角形であり，$\angle\mathrm{ADC} = 90^\circ$ である．向かい合う角の和が 180° であるから，四角形 ABCD は円に内接する．すなわち 4 点 A，B，C，D は同一円周上にある．

(2) 円周角の定理より，$\angle\mathrm{ABD} = \angle\mathrm{ACD} = 45^\circ$ である．

(3) (2) より直線 BD は $\angle\mathrm{ABC}$ を二等分する．したがって，角の二等分線の性質より

$$\mathrm{AP} = \mathrm{AC} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = 3 - \sqrt{3}, \qquad \mathrm{PC} = \mathrm{AC} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}+1} = \sqrt{3} - 1$$

である．また，方べきの定理より

$$\mathrm{BP} \cdot \mathrm{PD} = \mathrm{AP} \cdot \mathrm{PC} = (3-\sqrt{3})(\sqrt{3}-1) = 4\sqrt{3} - 6.$$