演習問題　解答

第 2 回

第 1 問 直角をはさむ 2 辺の長さを a, b とすると，$b = 12 - a$ と表せる．ここで，辺の長さは正の値をとるから，$0 < a < 12$ である．

(1) 三角形の面積を S とすると，平方完成によって

$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}a(12-a) = -\frac{1}{2}(a^2 - 12a) = -\frac{1}{2}(a-6)^2 + \frac{9}{2}$$

とできる．したがって S は $a = 6$ のときに最大値 $\dfrac{9}{2}$ をとる．このとき，$b = 12 - a = 6$ であるから，三角形の形状は **直角二等辺三角形** である．

(2) 斜辺の長さを c とすると，三平方の定理と $c > 0$ より

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (12-a)^2} = \sqrt{2a^2 - 24a + 144}$$

である．根号の中が最小であれば，c の値も最小である．根号の中の式を a について平方完成すれば

$$2a^2 - 24a + 144 = 2(a^2 - 12a) + 144 = 2(a-6)^2 + 72$$

であるから，$a = 6$，すなわち **直角二等辺三角形** のときに最小値 $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ をとる．

第 2 問 (1) 5 人のテストの平均点 $\overline{x}$ は

$$\overline{x} = \frac{15 + 18 + 16 + 14 + 18}{5} = 16.2$$

であるから，分散 s^2 は

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{(15-16.2)^2 + (18-16.2)^2 + (16-16.2)^2 + (14-16.2)^2 + (18-16.2)^2}{5} \\ &= 2.56 \end{aligned}$$

である．したがって標準偏差 s は

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{2.56} = 1.6$$

【別解】分散は次の公式

$$s^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2$$

で求めてもよい．この場合は

$$\overline{x^2} = \frac{15^2 + 18^2 + 16^2 + 14^2 + 18^2}{5} = 265, \quad (\overline{x})^2 = 16.2^2 = 262.44$$

より

$$s^2 = 265 - 262.44 = 2.56$$

を得る．

(2) 元の点数を x とすると，変更されたあとの点数 y は $y = 4x + 8$ と表せる．5 人の y の平均 $\overline{y}$ は

$$\overline{y} = \overline{4x+8} = 4\overline{x} + 8$$

となる（平均も 4 倍して $+8$ される）．このとき偏差は

$$y - \overline{y} = (4x+8) - (4\overline{x}+8) = 4(x - \overline{x})$$

であるから，4 倍である．分散は偏差の 2 乗の平均値であるから，もとの点数 x の分散の 16 倍であり，標準偏差はその正の平方根であるから，もとの点数 x の標準偏差の 4 倍となる．したがって，

$$1.6 \times 4 = 6.4$$

第 3 問 (1) この命題の対偶は「n が奇数であれば，n^2 は奇数」である．これを示す．n が奇数のとき，整数 k を用いて $n = 2k - 1$ と表すことができて，

$$n^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 2(2k^2 - 2k) + 1$$

が成り立つ．$2k^2 - 2k$ は整数であるから，n^2 は奇数である．対偶命題が真であるから，もとの命題も真である．

(2) 背理法で示す．$\sqrt{2}$ が無理数でないと仮定すると，$\sqrt{2}$ は有理数である．よって，整数 a, b を用いて

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \qquad (a \text{ と } b \text{ は互いに素})$$

と表すことができる．これより，$a = \sqrt{2}b$ であるから，$a^2 = 2b^2$ が成り立つ．すなわち a^2 は偶数であるから，(1) より，a も偶数である．よって，整数 c を用いて $a = 2c$ とおくことができる．$4c^2 = 2b^2$ であるから，$b^2 = 2c^2$．これより b もまた偶数であるが，これは a と b が互いに素であることに矛盾する．ゆえに $\sqrt{2}$ は無理数である．

(3) 背理法で示す．$\sqrt{2} + \sqrt{3}$ が無理数でないと仮定すると，これは有理数である．この有理数を r とおくと，$r \neq 0$ に注意して，

$$\sqrt{3} = r - \sqrt{2} \quad \text{より} \quad 3 = r^2 - 2\sqrt{2}r + 2 \quad \text{であるから} \quad \sqrt{2} = \frac{r^2 - 1}{2r}$$

である．ここで，$r^2 - 1, 2r$ はどちらも有理数であるから，右辺は有理数である．一方で左辺は (2) より無理数であったから，矛盾である．したがって，$\sqrt{2} + \sqrt{3}$ は無理数である．

第 4 問 (1) 余弦定理より

$$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - 2 \cdot \mathrm{AB} \cdot \mathrm{BC} \cdot \cos \angle\mathrm{BAC} = 4 + 9 + 6 = 19$$

であるから，$\mathrm{BC} = \sqrt{19}$．また，

$$S = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{AB} \cdot \mathrm{AC} \cdot \sin \angle\mathrm{BAC} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

(2) 角の二等分線の性質より

$$\mathrm{BD} = \mathrm{BC} \times \frac{2}{2+3} = \frac{2\sqrt{19}}{5}$$

である．また，$\mathrm{AD} = x$ とおくと，(1) と同様にして

$$(\triangle\mathrm{ABD} \text{ の面積}) = \frac{\sqrt{3}}{2}x, \qquad (\triangle\mathrm{ACD} \text{ の面積}) = \frac{3\sqrt{3}}{4}x$$

である．一方，

$$(\triangle\mathrm{ABC} \text{ の面積}) = (\triangle\mathrm{ABD} \text{ の面積}) + (\triangle\mathrm{ACD} \text{ の面積})$$

であるから，

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{3\sqrt{3}}{4}x$$

より，$x = \dfrac{6}{5}$ である．

(3) 三角形の内心は各角の二等分線の交点であるから，直線 BI は $\angle\mathrm{ABD}$ を二等分する．再び角の二等分線の性質を用いて

$$\mathrm{AI} = \mathrm{AD} \times \frac{2}{2 + \frac{2\sqrt{19}}{5}} = \frac{6}{5 + \sqrt{19}} = 5 - \sqrt{19}.$$