

数学I 数と式 No.1

1 式の計算

いくつかの文字や数の積として表される式を **単項式** といい、ある文字に着目したとき、その文字の個数を単項式の **次数** という。また、着目している文字以外の部分を **係数** という。単項式の次数は着目する文字によって異なり、とくに言及されていなければ、すべての文字に着目する。

例 単項式 $-8x^3y^2$ の次数は 5、係数は -8 である。 x に着目したときの次数は 3、係数は $-8y^2$ である。

いくつかの単項式の和で表される式を **多項式** という。多項式をつくる各単項式を **項** といい、単項式と多項式を合わせて **整式** という。整式の項の中で、積に含まれる文字がまったく同じ項を **同類項** といい、整式の項の中で、ある文字について最も次数の高い項の次数を、その整式の (ある文字に着目したときの) **次数** という。また、次数が 0 の項を **定数項** という。

例 多項式 $x^3 + 3x^2 - 4$ の (x についての) 次数は 3、定数項は -4 である。

整式の項を次数が高い項から順に並べることを **降べきの順** に整理する*¹ といい、逆に次数が低い項から順に並べることを **昇べきの順** に整理するという。

整式の加減法

整式の同類項は係数をまとめて整理することができる。

例 $x^2 + 2xy + 3x^2 - 4xy = (1 + 3)x^2 + (2 - 4)xy = 4x^2 - 2xy$ 。

指数法則

m, n を正の整数*² とするとき、次が成り立つ。

$$(1) a^m a^n = a^{m+n} \quad (2) (a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m \quad (3) (ab)^n = a^n b^n \quad (4) a^0 = 1 \text{ (ただし } a \neq 0 \text{)}$$

例 $2^3 \cdot 2^7 = 2^{3+7} = 1024$, $(3^2)^3 = 3^6 = 729$, $2^3 \cdot 3^3 = (2 \cdot 3)^3 = 6^3 = 216$ 。

分配法則

整式の積の計算では、次の法則を用いる。これを **分配法則** という。

$$(A + B)(C + D) = AC + AD + BC + BD$$

例 $(x - 3)(x^2 + 3x + 9) = x^3 + 3x^2 + 9x - 3x^2 - 9x - 27 = x^3 - 27$ 。

この法則をよく使う形でまとめたものが、中学でも学んだ乗法公式である。

乗法公式

$$\begin{array}{ll} (1) (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 & (2) (a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \\ (3) (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab & (4) (ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ac + bd)x + bd \\ (5) (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \end{array}$$

例 $100^2 - 99^2 = (100 + 99)(100 - 99) = 199 \times 1 = 199$ 。

*¹ 「べき」とは累乗のことである。

*² 高校数学では整数はまだ定義していないが、中学数学で学習したものと同様に考えて良い。

直接の計算が難しい場合、文字の置き換えなどの工夫をすることで、乗法公式に当てはめて計算しやすくなる場合もある。

例 $p^2 + 2 = P$ と置き換えると、

$$\begin{aligned}(p^2 + 2p + 2)(p^2 - 2p + 2) &= (P + 2p)(P - 2p) \\ &= P^2 - (2p)^2 \\ &= P^2 - 2^2 p^2 \\ &= (p^2 + 2)^2 - 4p^2 \\ &= (p^2)^2 + 2 \cdot 2 \cdot p^2 + 2^2 - 4p^2 \\ &= p^4 + 4.\end{aligned}$$

因数分解

1つの整式をいくつかの整式の積として表すことを **因数分解** するといひ、積をつくる整式のことを **因数** という。因数分解は式の展開の逆の操作であり、基本は以下の手順を上から繰り返していく。

1. 共通因数でまとめる (くくり出す)。
2. 乗法公式を逆に使う。
3. 最大次数が最も低い文字に着目して整理する。
4. 文字や式を置き換えて公式を使う。

例 $x - 2y + xy - 2 = x(1 + y) - 2y - 2 = x(y + 1) - 2(y + 1) = (x - 2)(y + 1)$ 。

例 $6x^2 - x - 2 = (2x + 1)(3x - 2)$ 。

乗法公式 4. の逆。 **たすき掛け** などと呼ぶことがある。

$$\begin{array}{r} 3 \quad \quad -2 \quad \cdots -4 \\ 2 \quad \quad 1 \quad \cdots 3 \\ \hline \quad \quad \quad -1 \end{array}$$

例 $a^2 + ab - 3bc - 9c^2 = a^2 - (3c)^2 + (a - 3c)b = (a + 3c)(a - 3c) + (a - 3c)b = (a + b + 3c)(a - 3c)$ 。

例

$$\begin{aligned}(a - 1)^4 - 3(a - 1)^2 - 4 &= x^4 - 3x^2 - 4 \\ &= X^2 - 3X - 4 \\ &= (X + 1)(X - 4) \\ &= (x^2 + 1)(x^2 - 4) \\ &= (x^2 + 1)(x + 2)(x - 2) \\ &= \{(a - 1)^2 + 1\}(a - 1 + 2)(a - 1 - 2) \\ &= (a^2 - 2a + 2)(a + 1)(a - 3).\end{aligned}$$

$\leftarrow a - 1 = x$ と置いた。
 $\leftarrow x^2 = X$ と置いた。
 $\leftarrow$ 公式 3. の逆。
 $\leftarrow$ 公式 2. の逆。

たすき掛けは整式に対しても用いることがある。

例

$$\begin{aligned}2x^2 + (y + 3)x - y^2 + 1 &= 2x^2 + (y + 3)x - (y^2 - 1) \\ &= 2x^2 + (y + 3)x - (y - 1)(y + 1) \\ &= \{x + (y + 1)\}\{2x - (y - 1)\} \\ &= (x + y + 1)(2x - y + 1)\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad \quad y + 1 \quad \cdots 2y + 2 \\ 2 \quad \quad -(y - 1) \quad \cdots -y + 1 \\ \hline \quad \quad \quad y + 3 \end{array}$$

数学I 数と式 No.2

2 実数

$\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ のように, 0 及びそれに 1 ずつ足したり引いたりして得られる数を **整数** という. 正の整数 $1, 2, \dots$ を **自然数** という.

注意 0 を自然数に含める流儀もある^{*3} が, 日本の高校数学では現在のところ自然数は 1 からである.

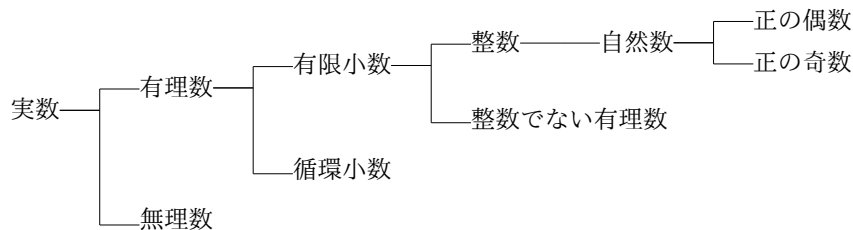
有理数・無理数・実数

a, b を整数とする. 整数の分数 $\frac{a}{b}$ の形で表すことができる数を **有理数** という. また, 有理数でない数を **無理数** とい
い, 有理数と無理数を合わせて **実数** という.

有理数は有限小数 (割り切れる) もしくは循環する無限小数 (循環小数) である. 一方, 無理数は循環しない (数字が不規則な) 無限小数になる.

注意 整数, 有限小数, 無限小数をすべてまとめたものを**実数**という.

例 次のような関係がある.



例 $\frac{1}{8} = 0.125$, $\frac{1}{3} = 0.33333\dots = 0.\dot{3}$, $\frac{275}{333} = 0.825825\dots = 0.\dot{8}2\dot{5}$ は有理数である.

例 $\sqrt{2} = 1.4142135\dots$, $\sqrt{3} = 1.7320508\dots$, $\pi = 3.1415926\dots$ は無理数である.

数直線

直線上に基準点と長さ e を決め, 基準点に 0, 基準点から右に e だけ進んだ位置に 1 を対応させる. このようにして直線上の点と実数を 1:1 に対応させた直線を **数直線** という. また, 数直線上で基準となる点を **原点** という. ふつう, 原点は O で表す. 数直線上で, 数 a を表す点を A とするとき, $A(a)$ などと表す. すなわち, 原点は $O(0)$ である.

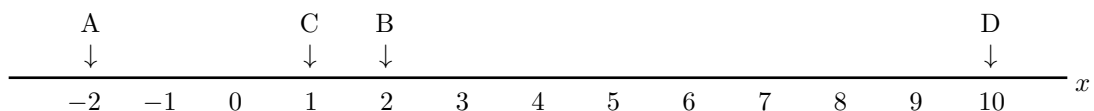
内分と外分

点 A, B に対して,

線分 AB 上にあり, $AC:CB = m:n$ を満たす点 C を, 線分 AB を $m:n$ に **内分** する点という.

線分 AB 上になく, $AD:DB = m:n$ を満たす点 D を, 線分 AB を $m:n$ に **外分** する点という.

例 A(-2), B(2) に対して, 線分 AB を 3:1 に内分する点を C, 3:1 に外分する点を D とすると, C(1), D(10) である.



^{*3} 混同を避けるために, 0 から始まる自然数を「非負整数」, 1 から始まる自然数を「正の整数」などということもある.

絶対値

実数 a に対して、数直線上の点 $A(a)$ と原点 $O(0)$ との距離を a の **絶対値** といい、記号 $|a|$ で表す。

絶対値の性質

$$(1) |a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

$$(2) |a| = |-a|$$

(3) $|x| = a$ を満たす実数は $+a$ または $-a$ (これを合わせて $x = \pm a$ と表す。± を **複合** という)。

2点間の距離

数直線上の2点 $A(a)$, $B(b)$ に対して、2点間の距離(長さ) AB は $AB = |b - a|$ である。

例 $A(-4)$, $B(1)$, $C(-6)$ に対して、 $AB = |1 - (-4)| = 5$, $BC = |(-6) - 1| = 7$ 。

平方根

負でない実数 a に対し、2乗すると a になる、すなわち $x^2 = a$ を満たす数 x を a の **平方根** という。正の数 a の平方根は正負それぞれ1つずつあり、その正の方を $\sqrt{a}$ 、負の方を $-\sqrt{a}$ と表す。記号 $\sqrt{\quad}$ を **根号** または **ルート** という。0の平方根は0だけである。

注意 負の数の平方根は「数学 II」で扱う。今は考えなくてよい。

平方根の性質

$$(1) a \geq 0 \text{ のとき, } (\sqrt{a})^2 = a$$

$$(2) \sqrt{a^2} = |a|$$

$$(3) a, b > 0 \text{ のとき, } \sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}, \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad \sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$$

注意 $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$ は成り立つとは限らない。加減法は文字式同様、根号の中が等しいものだけ計算できる。

$$\text{例 } \sqrt{8} + \sqrt{12} + \sqrt{48} = \sqrt{2 \cdot 2^2} + \sqrt{2^2 \cdot 3} + \sqrt{3 \cdot 4^2} = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 2\sqrt{2} + 6\sqrt{3}.$$

分母の有理化

分母に根号を含む分数は、有理数を分母とする分数になおすことができる。

$$\text{例 } \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{例 } \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

注意 原則として、根号を含む式は根号の中の整数が最も小さくなるようにして、分母を有理化する。

参考 根号の中に根号が含まれるものを **二重根号** などという。二重根号を外すには次の式を用いる。

二重根号

$$\sqrt{(a+b) \pm 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} \pm \sqrt{b} \quad (\text{ただし, } a \geq b)$$

$$\text{例 } \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(3+1) - 2\sqrt{3 \cdot 1}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}.$$