

数学B 数列 No.1

1 数列の定義

正の奇数を小さい順に並べると

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, \dots \quad (\text{A})$$

である。また、30 以下の素数を小さい順に並べると

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 \quad (\text{B})$$

である。このように、ある規則に従って数を並べたものを **数列** といい、数列の各数を **項** という。数列の項ははじめから順に第1項、第2項、 $\dots$ といい、 n 番目の項を第 n 項という。また、第1項を **初項** ともいう。数列 (A) のように項が無限に続く数列を **無限数列** という。数列 (B) のように項の数が有限である数列を **有限数列** といい、項の数を **項数**、最後の項を **末項** という。

数列を一般的に表すには、初項を a_1 、第2項を a_2 、 $\dots$ 、第 n 項を a_n 、 $\dots$ などとして表す。たとえば、数列 (A) において

$$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5, \dots, a_n = 2n - 1, \dots$$

となる。第 n 項 $a_n = 2n - 1$ の n に 1, 2, 3, $\dots$ を代入すると、数列 (A) の各項の値を求められる。このように、第 n 項 a_n を n の式で表したとき、これを数列の **一般項** といい、この数列を $\{a_n\}$ あるいは $\{2n - 1\}$ と表す。数列 (B) を $\{b_n\}$ とすると、

$$b_1 = 2, b_2 = 3, b_3 = 5, b_4 = 7, \dots$$

と表すことができる。数列 $\{b_n\}$ の一般項は n の式で表すことは難しい。

例 一般項 a_n が $a_n = n \cdot (-2)^{n-1}$ で表される数列において

$$a_1 = 1, a_2 = -4, a_3 = 12, a_4 = -32, \dots, a_k = k \cdot (-2)^{k-1}$$

である。

2 等差数列

等差数列

各項に一定の数 d を加えると次の項が得られるような数列を **等差数列** という。このとき、一定の数 d を **公差** という。

例 数列 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, $\dots$ は初項 2、公差 3 の等差数列である。

$\{a_n\}$ が等差数列であるとき、その各項の値は、初項と公差から定まる。初項を a 、公差を d として、次が成り立つ。

$$(1) a_n = a + (n - 1)d \quad (2) a_{n+1} - a_n = d$$

(3) $d > 0$ であれば $\{a_n\}$ は増加数列、 $d < 0$ であれば $\{a_n\}$ は減少数列になる。

(1) を等差数列の **一般項** という。

例 p で割ると r 余る自然数を小さい順に並べるとき、これは初項 r 、公差 p の等差数列をなす。

等差中項

3 つの数 a, b, c がこの順に等差数列をなすとき、次が成り立つ。

$$2b = a + c$$

初項 a 、公差 d の等差数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする。 S_n もまた数列となる。第 n 項を ℓ とおくと、和 S_n は

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + (\ell - d) + \ell$$

である。また、加える順序を逆にすると

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1 = \ell + (\ell - d) + \cdots + (a + 2d) + (a + d) + a$$

と表すこともできる。この 2 つの式を辺々加えると

$$2S_n = (a + \ell) + (a + \ell) + \cdots + (a + \ell) + (a + \ell) = n(a + \ell)$$

したがって、 $\ell = a_n = a + (n - 1)d$ であったことに注意すれば

$$S_n = \frac{1}{2}n(a + \ell) = \frac{1}{2}n\{2a + (n - 1)d\}.$$

が成り立つことが判る。

等差数列の和の公式

初項 a 、公差 d 、末項 (第 n 項) ℓ 、項数 n の等差数列の初項から第 n 項までの和 S_n は

$$(1) \text{ 末項の値が分かるとき } S_n = \frac{1}{2}n(a + \ell)$$

$$(2) \text{ 公差の値がわかるとき } S_n = \frac{1}{2}n\{2a + (n - 1)d\}$$

注意 等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 100 項までの和 S_{100} を求めるときは

1. 初項、公差から S_n を求め、 $n = 100$ を代入して計算する
2. 末項 a_{100} を求め、 S_{100} を計算する

の 2 通りの方法が考えられる。

3 等比数列

等比数列

各項に一定の数 r を掛けると次の項が得られるような数列を **等比数列** という。このとき、一定の数 r を **公比** という。

例 数列 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, $\cdots$ は初項 3、公比 2 の等比数列である。

$\{a_n\}$ が等比数列であるとき、その各項の値は初項と公比から定まる。初項、公比がどちらも 0 でないとき、初項を a 、公比を r として、次が成り立つ。

$$(1) a_n = ar^{n-1}$$

$$(2) \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$$

(3) $r > 0$ であれば $\{a_n\}$ はつねに正またはつねに負の数列、 $r < 0$ であれば $\{a_n\}$ は正の項と負の項が交互に現れる数列。

(1) を等比数列の **一般項** という。

等比中項

3 つの数 a, b, c がこの順に等比数列をなすとき、次が成り立つ。

$$b^2 = ac$$

初項 a 、公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする。 S_n もまた数列となる。和 S_n は

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}$$

である． $r \neq 1$ であるときは，各項を r 倍すると

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$$

が成り立つ．辺々引けば

$$S_n - rS_n = a - ar^n = a(1 - r^n)$$

したがって，

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

を得る． $r = 1$ のときは， $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n = a = (\text{初項})$ となるから，それら n 個の和を考えて

$$S_n = na.$$

等比数列の和の公式

初項 a ，公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n = \begin{cases} \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} & (r \neq 1) \\ na & (r = 1) \end{cases}$$

参考 等比数列の和の公式において， $a = 1$ ， $r = x$ とおくと，因数分解の公式

$$x^n - 1 = (x - 1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})$$

を得る．

4 Σ の定義とその性質

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ を, 記号 Σ を用いて*1

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

と表す. 上下の添え字はこれに限らない. 例えば,

$$\sum_{i=1}^m a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_m$$

である.

例 $\sum_{k=1}^6 (k^2 + 1) = (1^2 + 1) + (2^2 + 1) + (3^2 + 1) + (4^2 + 1) + (5^2 + 1) + (6^2 + 1) = 97.$

例 $\sum_{k=1}^3 (k+1)^2 = \sum_{k=2}^4 k^2 = \sum_{i=2}^4 i^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 = 29.$

Σ の性質

$$1. \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k \qquad 2. \sum_{k=1}^n ca_k = c \sum_{k=1}^n a_k \quad (\text{ただし } c \text{ は定数})$$

和の公式

$$\begin{aligned} 1. \sum_{k=1}^n c &= c + c + c + \cdots + c = nc \quad (c \text{ は定数}) \\ 2. \sum_{k=1}^n k &= 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1) \quad (\text{等差数列の和}) \\ 3. \sum_{k=1}^n k^2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\ 4. \sum_{k=1}^n k^3 &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{ \frac{1}{2}n(n+1) \right\}^2 \\ 5. \sum_{k=1}^n r^k &= r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n = \frac{r(r^n - 1)}{r - 1} \quad (\text{等比数列の和}) \end{aligned}$$

例 $\sum_{k=1}^n (6k^2 + 2k) = 6 \sum_{k=1}^n k^2 + 2 \sum_{k=1}^n k = n(n+1)(2n+1) + n(n+1) = n(n+1)\{(2n+1) + 1\} = 2n(n+1)^2.$

したがって,

$$\sum_{k=1}^8 (6k^2 + 2k) = 2 \cdot 8 \cdot 9^2 = 1296.$$

例 $\sum_{k=1}^n 2^{k-1} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n 2^k = \frac{1}{2} \cdot \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1.$

したがって,

$$\sum_{k=1}^{10} 2^{k-1} = 2^{10} - 1 = 1023.$$

*1 ギリシャ文字の「シグマ」の大文字である. Σ はアルファベットの S に相当し, S は和 (Summation) の意味である.