数学I　集合と論理　No.1

1　集合

集合の定義

ある条件を満たすものの集まりを **集合** といい，集合を構成している１つ１つのものを，その集合の **要素** という．
a が集合 S の要素であるとき，a は S に **属する** といい，$a \in S$ と表す．a が集合 S の要素でないとき，$a \notin S$ と表す．

集合は主に (1) 条件を示す (2) 要素を並べる の２通りの方法で表される．

例　３つの集合 S_1, S_2, S_3 を

$$S_1 = \{x \mid x \text{ は 12 以下の自然数で，4 の倍数}\}$$
$$S_2 = \{4x \mid x = 1, 2, 3\}$$
$$S_3 = \{4, 8, 12\}$$

とすると，これらはすべて同じ集合を表す．

有限個の要素からなる集合を **有限集合** という．また，要素が無数にある集合を **無限集合** という．

部分集合

A, B を集合とする．A の全ての要素が B に属するとき，A は B の **部分集合** であるといい，$A \subset B$ と表す．
A と B がまったく同じ要素からなるとき，A と B は **等しい** といい，$A = B$ と表す．

集合が等しいための条件

「$A = B$ であること」 と 「$A \subset B$ と $B \subset A$ が同時に成り立つこと」 は同じである．

例　$S_1 = S_2 = S_3$ である．

注意　$4 \in S_1$ と $\{4\} \subset S_1$ では意味が異なる．

空集合

要素を１つも持たない集合を **空集合** といい，記号 $\varnothing$ で表す．
どのような集合に対しても，$\varnothing$ はその部分集合であると約束する．

例　要素の数が n 個の有限集合は，2^n 種類の部分集合を持つ．

共通部分と和集合

２つの集合 A, B に対して，A と B のどちらにも属する要素の集合を，A と B の **共通部分** といい，$A \cap B$ と表す．
A と B の少なくとも一方に属する要素の集合を，A と B の **和集合** といい，$A \cup B$ と表す．

注意　記号 $\cap$ は「かつ」，記号 $\cup$ は「または」などと読む．

例　$T_1 = \{2, 3, 5, 7\}$，$T_2 = \{x \mid x \text{ は 6 の正の約数}\}$ に対して，$T_1 \cap T_2 = \{2, 3\}$，$T_1 \cup T_2 = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$ である．

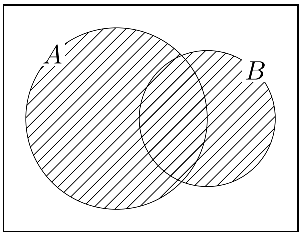
全体集合と補集合

ある１つの集合 U の中で，その部分集合を考えるとき，集合 U を **全体集合** という．
A が U の部分集合であるとき，A には属さないが U に属する要素の集合を A の **補集合** といい，$\overline{A}$ と表す．

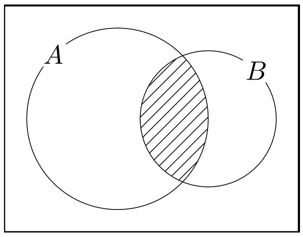
例　全体集合 $U = \{x \mid x \text{ は自然数}\}$ とする．$N = \{2n \mid n = 1, 2, \cdots\}$ の補集合は $\overline{N} = \{2n - 1 \mid n = 1, 2, \cdots\}$ である．

集合を考えやすくするために、次のような図を用いることがある．このような図を **Venn 図** という．

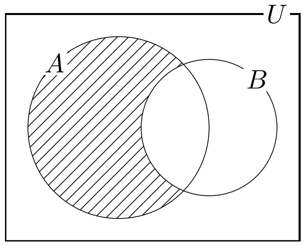
1. $A \cup B$



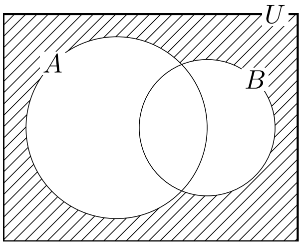
2. $A \cap B$



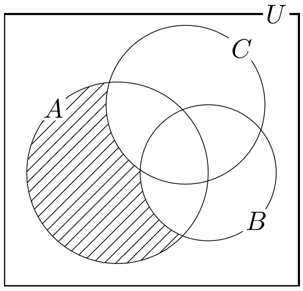
3. $A \cap \overline{B}$



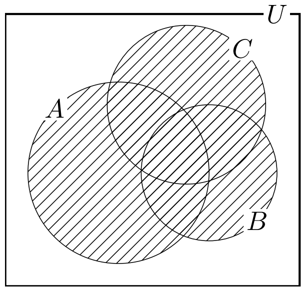
4. $\overline{A \cup B}$



5. $A \cup B \cup C$



6. $A \cap B \cap C$



注意　一般に，４つ以上の集合を Venn 図を用いて考えることは難しい．

全体集合 U を実数全体とする．

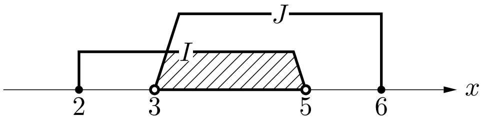
$$I = \{x \mid 2 \leqq x < 5\} \qquad J = \{x \mid 3 < x \leqq 6\}$$

なる集合 I，J を考えると，

$$\overline{I} = \{x \mid x < 2,\ 5 \leqq x\}, \qquad \overline{J} = \{x \mid x \leqq 3,\ 6 < x\}$$

である．このように，不等式を用いた集合に対しては，Venn 図ではなく数直線を用いることが多い．

$I \cap J = \{x \mid 3 < x < 5\}$



$\overline{I} \cup \overline{J} = \{x \mid x \leqq 3,\ 5 \leqq x\}$

共通部分，和集合の性質

A, B を集合とするとき，次が成り立つ．

1. $A \cap \overline{A} = \varnothing$
2. $A \cup \overline{A} = U$
3. $A \cap B \subset A \cup B$

de Morgan の法則

A, B を集合とするとき，次が成り立つ．

1. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

集合の要素の数

有限集合 A に対して，A の要素の数を $n(A)$ で表す．とくに，$n(\varnothing) = 0$ である．

和集合の要素の数

A, B, C を集合とするとき，次が成り立つ．

1. $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
2. $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$

数学I　集合と論理　No.2

2　論理

命題と条件

正しいか正しくないかが明確に定まる文や式を **命題** という．命題が正しいとき，その命題は **真** であるといい，正しくないとき，その命題は **偽** であるという．
変数の値を決めると命題になるような文や式を，その変数についての **条件** という．

例　「3 は素数である」は真の命題である．また，「$1+2=4$」は偽の命題である．

例　「y は 3 の倍数である」は変数 y についての条件である．

例　「アップルパイは美味しい」，「富士山は大きい」は命題であるとはいえない．

仮定と結論

条件 p, q を用いて「p ならば q」の形の命題をつくることができる．この命題を $p \Longrightarrow q$ と表す．
命題「$p \Longrightarrow q$」に対して，p をこの命題の **仮定** といい，q を **結論** という．

命題の真偽と反例

命題「$p \Longrightarrow q$」が偽であることを示すためには，p を満たすが q を満たさないような例を 1 つ挙げればよい．
このような例を **反例** という．

例　命題「n は偶数　ならば　n は 4 の倍数　である」は偽である．

条件 p に対して，「p でない」という条件を p の **否定** といい，$\overline{p}$ と表す．

命題と集合

条件 p を満たすものの集合を P，条件 q を満たすものの集合を Q とするとき，次が成り立つ．

1. $\overline{p}$ を満たすものの集合は $\overline{P}$ である．
2. 「p かつ q」を満たすものの集合は $P \cap Q$ である．
3. 「p または q」を満たすものの集合は $P \cup Q$ である．
4. 命題「$p \Longrightarrow q$」が成り立つこと　と　$P \subset Q$ が成り立つこと　は同じである．

例　正方形の集合 は 平行四辺形の集合 の部分集合である．

必要条件と十分条件

命題「$p \Longrightarrow q$」が真であるとき，p は q であるための **十分条件**，q は p であるための **必要条件** であるという．
「$p \Longrightarrow q$」，「$q \Longrightarrow p$」がどちらも真であるとき，p は q であるための **必要十分条件** である　あるいは　p と q は **同値** であるといい，$p \Longleftrightarrow q$ と表す．

例　「n が奇数」であることは「n が 3 以上の素数」であるための必要条件である．

de Morgan の法則

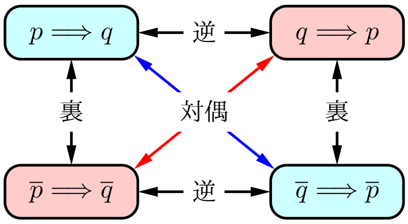
条件 p, q にに対して，次が成り立つ．

1. 「p または q」でない　$\Longleftrightarrow$　「p でない」 かつ 「q でない」　$\Longleftrightarrow$　$\overline{p}$ かつ $\overline{q}$
2. 「p かつ q」 でない　$\Longleftrightarrow$　「p でない」 または 「q でない」　$\Longleftrightarrow$　$\overline{p}$ または $\overline{q}$

逆，裏，対偶

命題「$p \Longrightarrow q$」に対して，「$q \Longrightarrow p$」 を 逆 ，「$\overline{p} \Longrightarrow \overline{q}$」 を裏 ，「$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$」 を 対偶 という．

逆，裏，対偶には次のような関係がある．



対偶命題の真偽

命題「$p \Longrightarrow q$」 とその対偶 「$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$」 の真偽は一致する．

例　すべての自然数 n について，n^2 が偶数であるならば，n は偶数である．

証明　この命題の対偶は「n が奇数である　ならば　n^2 は奇数である」となる．整数 k を用いて $n = 2k - 1$ と表すと，

$$n^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 2(2k^2 - 2k) + 1$$

が成り立つ．$2k^2 - 2k$ は整数であるから，n^2 は奇数である．ゆえに対偶命題が真であるから，もとの命題も真である．　□

注意　もとの命題と逆命題，裏命題の真偽は一致するとは限らない．一方，逆命題と裏命題の真偽は一致する．

背理法

$p \Longrightarrow q$ が真であることを証明したいときに，まず $p \Longrightarrow \overline{q}$ が真であると仮定して推論をすすめ，何らかの矛盾を導くことで，$p \Longrightarrow \overline{q}$ が偽である，すなわち $p \Longrightarrow q$ が真である，と主張することができる．このような証明の方法を 背理法 という．

例　$\sqrt{2}$ は無理数である．

証明　$\sqrt{2}$ が無理数でないと仮定すると，$\sqrt{2}$ は有理数である．よって，整数 a, b を用いて

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \qquad (\text{ただし，} \frac{a}{b} \text{ はこれ以上約分できない})$$

と表すことができるはずである．これより，$a = \sqrt{2}b$ であるから，$a^2 = 2b^2$ が成り立つ．
すなわち a^2 は偶数であるから，直前の例の結果より，a も偶数である．
よって，整数 c を用いて $a = 2c$ とおくことができる．したがって $4c^2 = 2b^2$ であるから，$b^2 = 2c^2$.
これより b もまた偶数であるから，整数 d を用いて $b = 2d$ とおくことができる．ここで，約分できないはずの分数が

$$\frac{a}{b} = \frac{2c}{2d} = \frac{c}{d}$$

とできることになるが，これは矛盾である．
以上の議論より，$\sqrt{2}$ が無理数でないと仮定したことが間違いであった．ゆえに $\sqrt{2}$ は無理数である．　□